Ciencias computacionales

Propedeutico: Matemáticas Discretas.

INAOE

Contents

Material multimedia recomendado:

Probabilidad:

- https://www.youtube.com/watch?v=DhOeAPRXGxM&t=348s
- https://www.youtube.com/watch?v=67oYaGbeFqQ
- https://www.youtube.com/watch?v=BmDI7BCcq8Y
- https://www.youtube.com/watch?v=E_hQgapTbkE
- https://www.youtube.com/watch?v=Wf1Dmj3eo8k

Probabilidad.

1 Principios fundamentales de conteo

1.1 Reglas de suma y producto

Regla de la suma

Suponga que algún evento E puede ocurrir en m formas y que un segundo evento F puede ocurrir en n formas, pero ambos eventos no pueden ser simultáneos. Entonces E o F puede ocurrir en $m + n$ formas.

Regla del producto

Suponga que un evento E ocurre en m formas e, independientemente de este evento, hay un segundo evento F que puede ocurrir en n formas. Entonces la combinación de E y F ocurre en mn formas.

Los principios indicados pueden extenderse a tres o más eventos. Es decir, suponga un evento E_1 que puede ocurrir en n_1 formas, un evento E_2 que puede ocurrir en n_2 formas, y a continuación de E_2, un tercer evento, E_3, puede ocurrir en n_3 formas y así en lo sucesivo. Entonces:

Regla de la suma: Si ningún par de eventos puede ocurrir al mismo tiempo, entonces uno de los eventos ocurre en:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n \ formas$$

Regla del producto: Si los eventos ocurren uno después del otro, entonces todos los eventos ocurren en el orden indicado en:

$$n_1 * n_2 * n_3 * \cdots * n_n \ formas$$

Ejemplos regla de la suma

Ejemplo 1 Supongamos que para elegir un representante de la facultad de Matemáticas en una comisión universitaria se pueden escoger bien un profesor o bien un estudiante de doctorado. ¿ De cuantas formas se puede escoger al representante si hay 37 profesores y 83 estudiantes de doctorado en la facultad?

Solución: En este caso , consideraremos como primera tarea la de elegir un profesor como representante . Esta tarea se puede hacer de 37 formas distintas . La segunda tarea , elegir a un estudiante la cual se puede realizar de 83 formas distintas . Por tanto la regla de la suma nos dice que hay $37 + 83 = 120$ formas para escoger al representante de la comisión.

Ejemplo 2 Un estudiante puede elegir un proyecto de trabajo de entre tres listas. Cada una de las listas contiene, respectivamente , 23 , 15 y 19 propuestas de trabajo. ¿ Cuantos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?

Solución: El estudiante puede elegir el trabajo de 23 formas distintas si lo hace de la primera lista, de 15 formas si lo hace de la segunda y de 19 formas si lo hace de la tercera. por tanto hay $23+15+19=57$ proyectos a elegir.

Ejemplos regla del producto

Ejemplo 3 Se quiere etiquetar las butacas de un auditorio con una letra y un numero entero positivo menor o igual que 100. ¿Cuál es el máximo numero de butacas a las que se le puede asignar una etiqueta diferente?

Solución: El proceso de etiquetar butacas consiste en dos tareas: asignarle una de las 26 letras del alfabeto y luego asignarle uno de los 100 posibles números. Según la regla del producto, hay $26*100=2600$ formas diferentes de de etiquetar una butaca. por tanto, el máximo numero de butacas con etiquetas diferentes es de 2600.

Ejemplo 4 En una sala hay 32 ordenadores. cada ordenador tiene 24 puertos. ¿ Cuantos puertos diferentes hay en la sala?

Solución: La tarea de elegir un puerto se puede dividir en dos tareas consecutivas , primero se selecciona un ordenador y luego se selecciona un puerto de dicho ordenador. Como hay 32 posibles ordenadores y 24 posibles elecciones del puerto, independientemente del ordenador que se haya elegido, la regla del producto dice que tenemos $32*24=768$ puertos.

A menudo se utiliza una version de la regla del producto. supongamos que una tarea requiere realizar sucesivamente las tareas $T_1, T_2, \cdots, T_n$. Si la tarea T_i puede hacerse de n formas después de haber realizado las tareas $T_1, T_2, \cdots, T_{i-1}$, entonces hay $n_1 * n_2 * \cdots * n_m$ formas de completar la tarea.

Para ejemplificar dicha version de la regla del producto, examinaremos la fabricación de placas de automóvil que consta de dos letras seguidas de cuatro dígitos.

a) Si ninguna letra o dígito se puede repetir, habrá $26*25*24*10*9*8*7=3,276,000$ placas posibles diferentes.

b) Si se permite repetir las letras y los dígitos sera posible tener $26*26*26*10*10*10*10=6,760,000$ placas diferentes.

A veces es necesario combinar varios tipos diferentes de principios de conteo en la solución de un problema. Para el siguiente ejemplo veremos que necesitamos ambas reglas para obtener el resultado.
Ejemplo 5

En algunas de la primeras versiones del lenguaje de programación BASIC, el nombre de una variable consta de una sola letra $(A, B, C, ...)$ o una sola letra seguida de un solo dígito. Como el computador no distingue entra letras mayúsculas y minúsculas, a y A se considera como el mismo nombre de variable, así como también E7 y e7. por la regla del producto , existen $26*10=260$ nombres de variables que constan de una letra seguida por un dígito, y como hay 26 nombres de variables que constan de una sola letra, por regla de la suma existen $260+26=286$ nombres para el lenguaje de programación.

1.2 Permutaciones

Para seguir con el análisis de la regla del producto , contaremos ahora disposiciones lineales de objetos, también conocidas como permutaciones cuando los objetos son distintos. Para comprender mejor las disposiciones lineales se dará el siguiente ejemplo

Ejemplo 6

En un grupo de 10 estudiantes, se escogerá a cinco y se les sentara en una fila para una foto. ¿ Cuantas disposiciones lineales son posibles?

Solución: La palabra clave es disposición, que indica la importancia del orden. Si $A, B, C, \cdots, I, J$ denotan a los 10 estudiantes, entonces BCEFI,CEFBI y ABCFG son tres disposiciones diferentes, aunque las dos primeras están formadas por los mismos cinco estudiantes.

Para responder la pregunta, analizaremos las posiciones y el numero posible de estudiantes que podemos elegir para tomar cada posición:

10	x	9	x	8	x	7	x	6
Primera posición		Segunda Posición		Tercera Posición		Cuarta Porsición		Quinta Posición

Cualquiera de los 10 estudiantes puede ocupar la primera posición de la fila. puesto que aquí no son posibles las repeticiones, solo podemos elegir a uno de los demás estudiantes para que ocupe la segunda posición. Continuando de esta manera, solo tenemos seis estudiantes de donde elegir para que ocupen la quinta y ultima posición. Esto produce un total de 30,240 disposiciones posibles de cinco estudiantes de un grupo de 10.

En consecuencia del ejemplo anterior definiremos la función factorial pues nos permitirá expresar respuestas de una manera mas conveniente.

Definicion:

Para un entero $n \geq 0$, n factorial (que se denota con $n!$) se define como

$$0! = 1$$

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1), n \geq 1$$

Definición Dada una colección de n objetos, cualquier disposición (lineal)de estos objetos se denomina permutacón de la colección.

1.3 Generación de permutaciones

Si partimos de las letras a,b,c, veremos que hay seis formas de disponerlas o permutarlas (3!): abc,acb,bac,bca,cab,cba. Si solo estamos interesados en colocar dos letras a la ves, habrá seis permutaciones de tamaños dos para la colección: ab,ba,ac,ca,bc,cb.

En general, si existen n objetos distintos, que se denotan con $a_1, a_2, \cdots, a_n$, y r es un entero, con $1 \leq r \leq n$, entones, por la regla del producto, el numero de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

n	x	(n-1)	x	(n-2)	x	.....	x	(n-r+1)	=
Primera posición		Segunda Posición		Tercera Posición				r-ésima Posición	

$$(n)(b-1)(n-2)\cdots(n-r+1) * \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Denotamos este numero como $p(n,r)$ de modo que $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Un caso particular de esta formula de permutacion es el ejemplo 6 donde $n = 10, r = 5$

$$\frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{5*4*3*2*1}$$

Cuando permutamos los n objetos de la colección tenemos $n = r$ y vemos que $P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!$.Por ejemplo, hay $3! = 6$ permutaciones de las letras A, B, C. Estas permutaciones son

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

Hay que tener en cuenta que la formula de permutacion $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ funciona para contar disposiciones lineales en las que los objetos no pueden remplazarse como se vio en el ejemplo 6, donde si un alumno se sienta en la primera silla, éste ya no puede sentarse en otra silla puesto que ya esta sentado; sin embargo cuando si se permite el remplazo, la regla del producto establece que el número de tales muestras es:

$$n * n * n \cdots * n_{(r factores)} = n^r$$

Por ejemplo si queremos saber cuantas disposiciones lineales de dos elementos donde se permite el remplazo existen para el conjunto A,B,C tenemos que $n = 3$ y $r = 2$ por lo que tenemos $3^2 = 9$ disposiciones para ordenar dichos elementos los cuales son

$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

Permutaciones con repeticiones

A menudo es necesario conocer el número de permutaciones en un multiconjunto; es decir, un conjunto de objetos de los cuales algunos son iguales. Entonces,

$$P(n, (n_1, n_2 \cdots, n_r))$$

denota el número de permutaciones de n objetos, en donde hay n_1 iguales, n_2 iguales, . . . , n_r iguales. A continuación se presenta la fórmula general:

$$P(n, (n_1, n_2, \cdots, n_r)) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_r!}$$

Ejemplo 7

Suponga que desea formar todas las "palabras" posibles de cinco letras con las letras de la palabra "BABBY". Hay $5! = 120$ permutaciones de los objetos B_1, A, B_2, B_3, Y, donde se han identificado las tres letras B. Observe las 6 permutaciones siguientes:

$$B_1B_2B_3AY, \quad B_2B_1B_3AY, \quad B_3B_1B_2AY, \quad B_1B_3B_2AY, \quad B_2B_3B_1AY, \quad B_3B_2B_1AY$$

Dichas permutaciones producen la misma palabra cuando se suprimen los subíndices. El 6 proviene del hecho de que hay $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas de colocar las tres letras B en las tres primeras posiciones en la permutación. Esto es cierto para cada conjunto de tres posiciones en que pueden aparecer las letras B. En consecuencia, el número de palabras diferentes de cinco letras que pueden formarse con las letras de la palabra "BABBY" es:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{3!} = 20$$

1.4 Combinaciones

Sea S un conjunto con n elementos. Una combinación de estos n elementos tomando r a la vez es cualquier selección de r de los elementos, donde el orden no importa. Esta selección se denomina r combinación; es simplemente un subconjunto de S con r elementos. El número de tales combinaciones se denotará por

$$C(n, r)$$

Antes de presentar la fórmula general para C(n, r) se considerará un caso especial.

Ejemplo 8

Encuentre el número de combinaciones de 4 objetos, A, B, C, D, tomando 3 a la vez.

Solucion: Al buscar las combinaciones se encuentra que son 4 diferentes, ABD,ACD,DAC, CBD. Cada combinación de tres objetos determina 3! = 6 permutaciones de los objetos:

ABC:	ABC,	ACB,	BAC,	BCA,	CAB,	CBA
ABD:	ABD,	ADB,	BAD,	BDA,	DAB,	DBA
ACD:	ACD,	ADC,	CAD,	CDA,	DAC,	DCA
CBD:	BDC,	BDC,	CBD,	CDB,	DBC,	ACB

Por tanto, al multiplicar el número de combinaciones por 3! se halla el número de permutaciones; es decir,

$$C(4,3) * 3! = P(4,3)$$

o

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!}$$

Pero $P(4,3) = 4*3*2 = 24$ y $3! = 6$; por tanto $C(4,3) = 4$ como se denotó antes. Como ya se indicó, cualquier combinación de n objetos tomando r a la vez determina $r!$ permutaciones de los objetos en la combinación; es decir

$$P(n,r) = r!C(n,r)$$

En consecuencia, se obtiene la siguiente fórmula para C(n, r), que tiene su expresión formal

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 9

Un estudiante que realiza un examen de historia recibe la instrucción de responder siete de 10 preguntas.¿ De cuantas formas puede el estudiante responder el examen?.

Solución: A qui no importa el orden por lo que el estudiante puede responder el examen de

$$C(10,7) = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

Por lo que el estudiante puede elegir una de las 120 formas posibles de solucionar el examen.

1.5 Teorema del binomio

Un binomio es la suma algebraica de dos términos; por ejemplo $a + b$. El Teorema del binomio estrictamente se refiere a la demostración de la expansión binomial

Teorema del binomio o expansión binomial: Sea un binomio $(a+b)$ cualquiera se cumple que cualquier potencia del binomio $(a + b)^n$ puede reescribirse como una serie de la forma:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

donde los números $\binom{n}{r}$ se denominan coeficientes binomiales definido por $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, por lo tanto

$$C(n,r) = \binom{n}{r}$$

Ejemplo 10

Encontrar las primeras tres expansiones de teorema del binomio

para la primera expansión n=1

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

Para la segunda expasion n=2

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para la segunda expasion n=3

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Los coeficientes de las potencias consecutivas de $a+b$ pueden escribirse en un arreglo triangular de números, denominado triángulo de Pascal, como se muestra en la figura1 donde se puede corroborar clara mente los coeficientes con los del ejemplo 10

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

Figure 1: Triangulo pascal

2 Probabilidad

2.1 Eventos y espacios de probabilidad

Espacio muestral

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se le llama espacio muestral y se representa con el símbolo S. A cada resultado en un espacio muestral se le llama elemento o miembro del espacio muestral, o simplemente punto muestral. Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos, podemos listar los miembros separados por comas y encerrarlos entre llaves. Por consiguiente, el espacio muestral S, de los resultados posibles cuando se lanza una moneda al aire, se puede escribir como:

$$S = \{H, T\},$$

en donde H y T corresponden a "caras" y "cruces", respectivamente.
Ejemplo 11

Considere el experimento de lanzar un dado. Si nos interesara el número que aparece en la cara superior, el espacio muestral sería

$$S1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si sólo estuviéramos interesados en si el número es par o impar, el espacio muestral sería simplemente

$$S2 = \{par, impar\}$$

El ejemplo ilustra el hecho de que se puede usar más de un espacio muestral para describir los resultados de un experimento. En este caso, S1 brinda más información que S2. Si sabemos cuál elemento ocurre en S1, podremos indicar cuál resultado tiene lugar en S2; no obstante, saber lo que pasa en S2 no ayuda mucho a determinar qué elemento ocurre en S1. En general, lo deseable sería utilizar un espacio muestral que proporcione la mayor información acerca de los resultados del experimento. En algunos experimentos es útil listar los elementos del espacio muestral de forma sistemática utilizando un diagrama de árbol.

Ejemplo 12

Un experimento consiste en lanzar una moneda y después lanzarla una segunda vez si sale cara. Si en el primer lanzamiento sale cruz, entonces se lanza un dado una vez. Para listar los elementos del espacio muestral que proporciona la mayor información construimos el diagrama de árbol de la figura 2 .

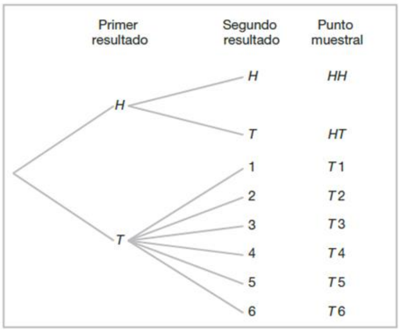


Figure 2: Diagrama de árbol para el ejemplo 12

Las diversas trayectorias a lo largo de las ramas del árbol dan los distintos puntos muestrales. Si empezamos con la rama superior izquierda y nos movemos a la derecha a lo largo de la primera trayectoria, obtenemos el punto muestral HH, que indica la posibilidad de que ocurran caras en dos lanzamientos sucesivos de la moneda. De igual manera, el punto muestral T3 indica la posibilidad de que la moneda muestre una cruz seguida por un 3 en el lanzamiento del dado. Al seguir todas las trayectorias, vemos que el espacio muestral es

$$S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}.$$

Evento

Definición: Un evento es un subconjunto de un espacio muestral.

En cualquier experimento dado, podríamos estar interesados en la ocurrencia de ciertos eventos, más que en la ocurrencia de un elemento específico en el espacio muestral. Por ejemplo, quizás estemos interesados en el evento A, en el cual el resultado de lanzar un dado es divisible entre 3. Esto ocurrirá si el resultado es un elemento del subconjunto A = 3, 6 del espacio muestral S_1 del ejemplo 12.

Para cada evento asignamos un conjunto de puntos muestrales, que constituye un subconjunto del espacio muestral. Este subconjunto representa la totalidad de los elementos para los que el evento es cierto.

Ejemplo 13

Dado el espacio muestral $S = \{t | t \geq 0\}$, donde t es la vida en años de cierto componente electrónico, el evento A, que es donde el componente falle antes de que finalice el quinto año es el subconjunto $A = \{t | 0 \leq t < 5\}$. Es posible concebir que un evento puede ser un subconjunto que incluye todo el espacio muestral S, o un subconjunto de S que se denomina conjunto vacío y se denota con el símbolo $\emptyset$, que no contiene ningún elemento. Por ejemplo, si en un experimento biológico permitimos que A sea el evento de detectar un organismo microscópico a simple vista, entonces $A = \emptyset$.

Puesto que un evento es un conjunto, es posible combinar eventos para formar nuevos eventos al usar las diversas operaciones con conjuntos:

i $A \cup B$ es el evento que ocurre si A ocurre o B ocurre (o ambos).

ii $A \cap B$ es el evento que ocurre si A ocurre y B ocurre.

iii $A°$, el complemento de A, también se escribe A es el evento que ocurre si no ocurre A.

Dos eventos A y B se denominan mutuamente excluyentes si son ajenos; es decir, si $A \cap B = \emptyset$. En otras palabras, A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente. Tres o más eventos son mutuamente excluyentes si dos de ellos son mutuamente excluyentes.

Espacios de probabilidad finitos

Sea S un espacio muestral finito; por ejemplo $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Un espacio de probabilidad finito, o modelo de probabilidad, se obtiene al asignar a cada punto a_i en S un número real p_i, denominado probabilidad de a_i que cumple las siguientes propiedades:

i Todo pi es no negativo; es decir, $p_i \geq 0$.

ii La suma de los p_i es 1; es decir, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ o $P(S) = 1$.

La probabilidad de un evento A, escrito P(A), se define entonces como la suma de las probabilidades de los puntos en A.

Ejemplo 14

Lance una moneda tres veces y observe la sucesión de caras (H) y cruces (T) que se obtiene. El espacio muestral consta de los ocho elementos siguientes:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

Sean A el evento de obtener dos o más caras consecutivas y B el evento que todos los resultados sean iguales: $A = \{HHH, HHT, THH\}$ y $B = \{HHH, TTT\}$

Ahora suponga que se lanzan tres monedas y que se registra el número de caras.

El espacio muestral es $S_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ que representa el numero de caras que podemos obtener en el espacio muestral S. Las siguientes asignaciones sobre los elementos de S_1 definen un espacio de probabilidad:

$$P(0) = \tfrac{1}{8},\ P(1) = \tfrac{3}{8},\ P(2) = \tfrac{3}{8},\ P(3) = \tfrac{3}{8}$$

Es decir, cada probabilidad es no negativa y la suma de las probabilidades es 1. Sea A el evento de obtener por lo menos una cara y sea B el evento de obtener sólo caras o sólo cruces; es decir, sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 3\}$. Entonces, por definición,

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}$$
$$P(B) = P(0) + P(3) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{1} = \tfrac{1}{4}$$

Espacios equiprobables

A menudo las características físicas de un experimento sugieren la asignación de probabilidades iguales a los diversos resultados del espacio muestral. De modo que un espacio de probabilidad finito S, donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad, se denomina espacio equiprobable. En particular, si S contiene n puntos, entonces la probabilidad de cada punto es 1/n. Además, si un evento A contiene r puntos, entonces su probabilidad es r(1/n) = r/n. En otras palabras, donde n(A) denota el número de elementos en un conjunto A,

$$P(A) = \frac{numero\,de\,elementos\,en\,A}{numero\,de\,elementos\;S} = \frac{n(A)}{n(S)} \;o\; P(A) = \frac{numero\;resultados\;favorablesaA}{numero\,total\,de\,resultados\,posibles}$$

Ejemplo 15

De una baraja normal de 52 naipes (Figura 3) se selecciona una carta.

Figure 3: baraja de nipes

Sean $A = \{la\,carta\,es\,una\,pica\}$ y $B = \{la\,carta\,es\,una\,figura\}$. Se calculan $P(A), P(B) y P(A \cap B)$. Puesto que se tiene un espacio equiprobable,

$$P(A) = \frac{numero\,de\,picas}{numero\,de\,cartas} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},\; P(B) = \frac{numero\,de\,cartas\,con\,figura}{numero\,de\,cartas} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{numero\,de\,cartas\,de\,pica\,con\,figura}{numero\,de\,cartas} = \frac{3}{52}$$

Teoremas sobre espacios de probabilidad

El siguiente teorema se concluye directamente a partir que la probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades de sus puntos:

Teorema: La función de probabilidad P definida sobre la clase de todos los eventos en un espacio de probabilidad finito tiene las siguientes propiedades:

i Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

ii P(S) = 1.

iii Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El siguiente teorema formaliza la intuición que si p es la probabilidad que ocurra un evento E, entonces $1 - p$ es la probabilidad que E no ocurra. (Es decir, si se acierta en el blanco 1/3 de las veces, entonces se falla $1 - p = 2/3$ de las veces.)

Teorema: Sea A cualquier evento. Entonces $P(A^{\circ}) = 1 - P(A)$.

El siguiente teorema se concluye directamente a partir del primer teorema mencionado.
Teorema: Considere el conjunto vacío M y dos eventos arbitrarios A y B. Entonces:

i $P(\emptyset) = 0$.

ii $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iii Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Teorema: (Principio de adición): Para dos eventos arbitrarios A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 16

Suponga que un estudiante es elegido al azar entre 100 estudiantes, de los cuales 30 cursan matemáticas, 20 cursan química y 10 cursan matemáticas y química. Encuentre la probabilidad p que curse matemáticas o química. Sean M = { estudiantes que cursan matemáticas } y C = { estudiantes que cursan química}. Puesto que el espacio es equiprobable,

$$P(M) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10},\ P(C) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10},\ P(M \cap C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

por lo tanto

$$p = P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

2.2 Variables aleatorias

Sea S un espacio muestral de un experimento, como ya se observó, el resultado del experimento, o los puntos en S, no necesariamente son números. Por ejemplo, al lanzar una moneda los resultados son H (cara) o T (cruz), y al lanzar un par de dados los resultados son pares de enteros positivos. Sin embargo, a menudo es necesario asignar un número específico a cada resultado del experimento. Por ejemplo, al lanzar una moneda, puede ser conveniente asignar 1 a H y 0 a T; o al lanzar un par de dados, asignar la suma de los dos enteros al resultado. Una asignación así de valores numéricos se denomina variable aleatoria. En forma más general, se tiene la siguiente definición.

Definición: Una variable aleatoria X es una regla que asigna un valor numérico a cada resultado en un espacio muestral S.

R_X denota el conjunto de números asignados por una variable aleatoria X, y R_X se denomina espacio rango.

Ejemplo 17
Se lanzan un par de dados normales. El espacio muestral S consta de los 36 pares ordenados (a, b), donde a y b pueden ser cualquiera de los enteros del 1 al 6.
Sea X la suma de los números en cada punto en S; entonces X es una variable aleatoria con espacio rango

$$R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Sea Y el máximo de los dos números en cada punto en S; entonces Y es una variable aleatoria con espacio rango

$$R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.3 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria sobre un espacio muestral finito S con espacio rango $R_x = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$. Entonces, X induce una función f que asigna probabilidades p_k a los puntos x_k en R_x como sigue:

$f(x_k) = p_k = P(X = x_k) =$ suma de probabilidades de los puntos en S cuya imagen es x_k.

El conjunto de pares ordenados $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_t, f(x_t))$ se denomina distribución de la variable aleatoria X; suele proporcionarse mediante una tabla como en la figura .

Resultado x	x_1	x_2	x_3	......	x_t
Probabilidad $f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	.....	$f(x_t)$

Cuando S es un espacio equiprobable, resulta fácil obtener la distribución de una variable aleatoria a partir del siguiente resultado.

Teorema: Sea S un espacio equiprobable, y sea f la distribución de una variable aleatoria X sobre S con el espacio rango $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$. Entonces

$$P_i = f(x_i) = \frac{numero\,de\,puntos\,en\,S\,cuya\,imagen\,es\,x_i}{numero\,de\,puntos\,en\,S}$$

Ejemplo 18

Sea X la variable aleatoria del ejemplo 17 que asigna la suma al resultado del lanzamiento de un par de dados. Observe que n(S) = 36 y que $R_x = \{2, 3, ..., 12\}$. Al aplicar el teorema anterior, se obtiene la distribución f de X:

f(2) = 1/36, ya que hay un resultado (1, 1) cuya suma es 2.
f(3) = 2/36, ya que hay dos resultados (1, 2) y (2, 1) cuya suma es 3.
f(4) = 3/36, ya que hay tres resultados (1, 3), (2, 2) y (3, 1) cuya suma es 4.

En forma semejante, f (5) = 4/36, f (6) = 5/36, . . . , f (12) = 1/36. Así, se tiene como distribución de X:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2.4 Probabilidad condicional e independiencia estadística

Probabilidad condicional

Suponga que E es un evento en un espacio muestral S con $P(E) > 0$. La probabilidad de que un evento A ocurra una vez que ha ocurrido E o, específicamente, la probabilidad condicional de A dado E, que se escribe $P(A|E)$ se define como sigue:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Como se muestra en el diagrama de Venn en la figura 2.5, $P(A|E)$ mide, en cierto sentido, la probabilidad relativa de A con respecto al espacio reducido E.

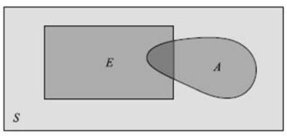


Figure 4: Probabilidad condicional

Suponga que S es un espacio equiprobable, y que n(A) denota el número de elementos en A. Entonces:

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(S)},\ P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

por lo tanto

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

Este resultado se plantea formalmente.

Teorema: Suponga que S es un espacio equiprobable y que A y E son eventos. Entonces

$$P(A|E) = \frac{numero\, de\, elementos\, en\, A \cap E}{numero\, de\, elementos\, en\, E} = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

Ejemplo 19

Se lanza un par de dados normales. El espacio muestral S consta de los 36 pares ordenados (a, b), donde a y b pueden ser cualquiera de los enteros del 1 al 6. Por tanto, la probabilidad de cualquier punto es 1/36. Encuentre la probabilidad de que uno de los dados sea 2 si la suma es 6. Es decir, encuentre $P(A|E)$ donde:

E = {la suma es 6} A = {el 2 aparece por lo menos en un dado}. $A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,$ por lo tanto $P(A) = 11/36$. $E = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$, por lo tanto $P(E) = 5/36$.

Así, E consta de 5 elementos y $A \cap E$ consta de dos elementos; a saber,

$$E = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

$$A \cap E = \{(2,4),(4,2)\} \text{ y } P(A \cap E) = 2/36$$

por lo tanto, $P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{2}{5}$.

Se comprueba utilizando la formula inicial solo con probabilidades de los conjuntos $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{2/36}{5/36} = 2/5$

Teorema de la multiplicación para la probabilidad condicional

Suponga que A y B son eventos en un espacio muestral S con $P(A) > 0$. Por definición de probabilidad condicional,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Al multiplicar ambos miembros por P(A) se obtiene el siguiente resultado útil:

$$P(A \cap B) = P(A)P(A|B)$$

Este teorema proporciona una fórmula para encontrar la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos A y B. Resulta fácil extenderlo a tres o más eventos $A_1, A_2, ...A_m$; es decir,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_m) = P(A_1) * P(A_2|A_1) \cdots P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

Eventos independientes

Se dice que los eventos A y B en un espacio de probabilidad S son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la ocurrencia del otro. De forma más precisa, B es independiente de A si P(B) es igual a $P(B|A)$. Luego, al sustituir P(B) por $P(B|A)$ en el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Las ecuaciones anteriores se utilizan formalmente como la definición de independencia.

Definición: Los eventos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; en caso contrario, son dependientes.

Conviene señalar que la independencia es una relación simétrica. En particular, la ecuación

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ implica ambos $P(B|A) = P(B)$ y $P(A|B) = P(A)$
Ejemplo 20

Una moneda normal se lanza tres veces, lo que da el espacio equiprobable

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

Considere los eventos:

A = {el primer lanzamiento es cara} = {HHH, HHT, HTH, HTT } B = {el segundo lanzamiento es cara} = {HHH, HHT, THH, THT } C = {se obtienen exactamente dos caras consecutivas} = {HHT, THH }

Resulta evidente que A y B son eventos independientes: este hecho se comprueba a continuación. Por otra parte, la relación entre A y C y entre B y C no es evidente. Se afirma que A y B son eventos independientes, en cambio B y C son dependientes. Se tiene:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

También,

$$P(A \cap B) = P(\{HHH, HHT\}) = \frac{1}{4}, P(A \cap C) = P(\{HHT\}) = \frac{1}{8}, P(B \cap C) = P(\{HHT, THH\}) = \frac{1}{4}$$

En consecuencia,

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B),\ y\, asi\, A\, y\, B\, son\, independientes$$

$$P(A)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C),\ y\, asi\, A\, y\, C\, son\, independientes$$

$$P(B)P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C),\ y\, asi\, B\, y\, C\, son\, independientes$$

A menudo, se postulará que dos eventos son independientes, o el experimento en sí implicará que dos eventos son independientes.

2.5 Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes nos expresa la probabilidad de que ocurra un suceso determinado, A_j, condicionado a que el suceso B ya ha ocurrido

Sean los eventos $B_1, \cdots, B_k$ una partición de S tal que $P_r(B_j) > 0$ para $j = 1, \cdots, k$, y sea A un evento definido sobre S tal que $P_r(A) > 0$. Entonces para $i = 1, \cdots, k$:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|B_i) * P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) * P(B_j)}$$

Las probabilidades $P(B_j)$ se designan probabilidades a "priori", o de las causas. Las probabilidades $P(B_j/A)$ se designan probabilidades a "posteriori", si el suceso B ya ha ocurrido, probabilidad de que sea debido a la causa

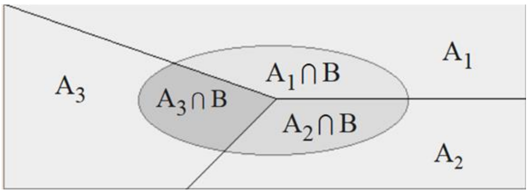
Ejemplo 21

Una empresa farmacéutica tiene tres delegaciones, Madrid, Barcelona y Granada. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Madrid, el 30% en Barcelona, y el 25% en Granada. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Madrid, el 3% en Barcelona y el 4% en Granada. Calcular:

1.Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso
2.Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Granada?

Solucion:
A_1: "Producido Madrid", A_2: "Producido Barcelona" A_3: "Producido Granada", B : "Defectuoso"
Calculamos las probabilidades

$$P(A_1) = 0.45; P(A_2) = 0.30; P(A_3) = 0.25$$
$$P(B/A_1) = 0.05; P(B/A_2) = 0.03; P(B/A_3) = 0.04$$



1.Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$P(B) = (0.45)(0.05) + (0.3)(0.03) + (0.25)(0.04) = 0.0415$$

2.Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Granada?

Aplicando teorama de bayes tenemos

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{(0.25)(0.04)}{0.0415} = 0.241$$

References

[1] R. Johnsonbaugh and M. G. Osuna, *Matemáticas discretas.* Pearson Educación, 2005.

[2] R. Grimaldi, *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones.* Pearson Educación, 1998.

[3] K. H. Rosen and J. M. P. Morales, *Matemática Discreta y sus Aplicaciones.* 2004.

[4] L. E. Sucar, *Probabilistic Graphical Models.* Springer, 2015.

[5] S. Lipschutz and M. L. Lipson, *Matemáticas discretas.* McGraw Hill, 2007.