Ciencias computacionales

Propedeutico: Matemáticas Discretas.

INAOE

Contents

Material multimedia recomendado:

Inducción:

- `https://www.youtube.com/watch?v=LU88nIZXmEw`
- `https://www.youtube.com/watch?v=yEfz3ZsX02s`

Recursión:

- `https://www.youtube.com/watch?v=JHeVpfXyaB4`
- `https://www.youtube.com/watch?v=muRVDIhumBQ`

1 Inducción matemática.

Introducción

Una técnica muy utilizada para demostrar propiedades sobre el conjunto de números naturales, es el principio de inducción. Este principio provee una herramienta poderosa y fácil de usar por ejemplo:

¿Cuál es la fórmula de la suma de los n primeros enteros positivos impares? Las sumas de los primeros impares positivos, para n=1,2,3,4,5, son:

1=1	1+3=4	1+3+5=9
1+3+5+7=16	1+3+5+7+9=25	

A partir de estos valores, es razonable suponer que la suma de los n primeros enteros impares es n^2. Necesitamos un método para demostrar que esta suposición es correcta, si es que realmente lo es.

La inducción matemática es una técnica que se puede utilizar para demostrar enunciados de este tipo y de una gran variedad de objetos distintos. por ejemplo, se emplea para demostrar propiedades acerca de la complejidad de los algoritmos, estudiar si son correctos ciertos tipos de programas de ordenador o teoremas sobre grafos y árboles, así como un amplio abanico de identidades y desigualdades.

Cabe destacar que la técnica de demostración conocida como inducción matemática está basada sobre el principio del buen orden el cual establece que todo subconjunto $X \in Z^+$ contiene un entero $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, es decir cualquier subconjunto no vacío de Z^+ contiene un elemento mínimo por lo que el conjunto Z^+ es diferente a Q^+ y R^+ ya que solo Z^+ cuenta con la propiedad de que cualquier subconjunto tiene un elemento mínimo.

1.1 Teorema de inducción

Ahora estableceremos las base de esta técnica de demostración por inducción.

Principio de inducción finita o principio de inducción matemática. Sea P(n) una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), en las que aparece una o varias veces la variable n, que representa un entero positivo, tenemos que:

1) Si P(1) es verdadera; y

2) Siempre que P(k) sea verdadera (para algún $k \in Z^+$), entonces P(k+1) sera verdadera;

entonces P(n) es verdadera para todo $n \in Z^+$.

Hay que tener muy en claro que P(n) es una función proposicional o un predicado como, por ejemplo, la sentencia $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{n}$ o la propiedad $n \leq 2^n$ y es por esto que la inducción matemática es una técnica para demostrar esta clase de teoremas. En otras palabras, la inducción matemática se usa para demostrar proposiciones de la forma $\forall n P(n)$, donde el dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Como se vio en el teorema de inducción matemática, ésta se divide en dos pasos, donde la condición de la parte 1) se conoce como la **Base de la inducción**, mientras que la parte 2) se conoce como el **Paso inductivo**
Nota: La sentencia P(k) para un entero positivo fijo se denomina **Hipótesis de inducción**.
Expresando como regla de inferencia, esta técnica de demostración se puede enunciar como sigue:

$$[P(1) \wedge \forall k(P(k) \longrightarrow P(k+1))] \longrightarrow \forall n P(n)$$

Lo que traducido al lenguaje natural significa que, cuando se cumplen los dos pasos de inducción matemática (Paso base $P(1)$ y paso inductivo $\forall k(P(k) \longrightarrow P(k+1))$), hemos demostrado que la proposición P(n) es verdadera para todos los enteros positivos n ($\forall n P(n)$)

Ejemplos

Demostrar mediante el método de inducción matemática que para cualquier $n \in Z^+$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n)(n+1)}{2}$$

Solución

Lo primero que se debe hacer para la demostración por el método de inducción matemática es identificar nuestra proposición P(n) por lo tanto

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n)(n+1)}{2} \tag{1}$$

Una vez identificada nuestra P(n) comprobamos el paso base probando para P(1).
Paso Base.

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{(1)(1+1)}{2} \tag{2}$$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{(1)(2)}{2}$$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2}$$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = 1$$

Si el paso base es correcto, planteamos nuestra hipótesis de inducción proponiendo que $n = k$ quedando así:

Hipótesis Inductiva

$$P(n) = P(k)$$

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{(k)(k+1)}{2} \tag{3}$$

Finalmente formulamos nuestro paso inductivo en el cual debemos demostrar que si la proposición es válida para $n = k$, entonces es válida para $n = k + 1$. Para este paso es importante recordar que si se tiene la sucesión numérica $P(k) = 1+2+\cdots+k$, la siguiente seria $P(k+1) = 1+2+3+\cdots+k+(k+1)$, puesto que hay que sumar el número que sucede a k, siendo este $(k+1)$ y en lo que corresponde a la fórmula cerrada $P(k) = \frac{(k)(k+1)}{2}$, pare el siguiente numero tendríamos $P(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$, puesto que solo basta sustituir k por $(k+1)$

Paso Inductivo.

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \tag{4}$$

Observe como podemos sustituir la ecuación 3 en la ecuación 4, puesto que una parte de la sucesión de P(k+1) es P(k), quedando así

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = P(k) + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k)(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \tag{5}$$

Una vez establecido nuestro paso inductivo, sólo queda demostrar que es correcto y en este caso sólo basta comprobar la igualdad mediante propiedades algebraicas quedando

$$\frac{(k)(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

simplificando del lado izquierdo tenemos

$$\frac{(k)(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Resolvemos productos

$$\frac{(k^2+k) + (2k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

efectuamos las sumas

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

factorizamos

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Nota: En este último paso podemos ajustar el lado izquierdo de la ecuación descomponiendo un factor, puesto que $k+2 = (k+1)+1$ o efectuar la suma del lado derecho dado que $(k+1)+1 = k+2$. Usando la segunda opción tenemos que

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Lo que muestra que nuestra proposición es correcta. Puesto que $P(1)$ es verdadera y $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ (paso base e inductivo), el principio de induccion matematica muestra que $p(n)$ es verdadera para todo entero positivo n

2 Relaciones de Recurrencia

Introducción

A veces es difícil definir objetos explícitamente y, sin embargo, puede resultar sencillo definiros en términos de ellos mismos. Este proceso se llama recursión. Por ejemplo, el dibujo mostrado en la Figura 1 se ha generado recursivamente, primero se tiene un dibujo original, luego se lleva a cabo un proceso de superposición sucesiva de copias más pequeñas del dibujo centradas sobre el dibujo anterior.

Figure 1: Imagen recursiva extraída de www.rootear.com

Estas relaciones son útiles en ciertos problemas de conteo. Una relación de recurrencia relaciona el n-ésimo elemento de una sucesión con sus predecesores. Como las relaciones de recurrencia tienen una relación cercana con los algoritmos recursivos, éstas surgen de manera natural en el análisis de éstos.

Para clarificar las relaciones de recurrencia considere las siguientes instrucciones para generar una sucesión:

1 Iniciar con 5.

2 Dado cualquier término, sume 3 para obtener el siguiente.

Si se listan los términos de la sucesión, se obtiene

$$5, 8, 11, 14, 17, ... \tag{6}$$

El primer término es 5 por la instrucción 1. El segundo término es 8 porque la instrucción 2 dice que se sume 3 a 5 para obtener el siguiente término. El tercer término es 11 porque la instrucción 2 dice que se sume 3 a 8 para obtener el siguiente término. Si se siguen las instrucciones 1 y 2, se puede calcular cualquier término de la sucesión. Las instrucciones 1 y 2 no dan una fórmula explícita para el n-ésimo término de la sucesión en el sentido de proporcionar una fórmula en la que se pueda "sustituir n" para obtener el valor del n-ésimo término, sino que al calcular término por término en algún momento se podrá obtener cualquier término de la sucesión.

Si la sucesión (6) se denota por $a_1, a_2, ...$, se puede enunciar de nuevo la instrucción 1

$$a_1 = 5 \tag{7}$$

y la instruccion 2 se puede estableer como

$$a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \tag{8}$$

Haciendo $n = 2$ en (8), se obtiene

$$a_2 = a_1 + 3$$

y por (7), $a_1 = 5$; entonces

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

siguiendo el mismo proceso anterior para $n = 3$, se obtiene

$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

Por lo tanto usando las ecuaciones 7 y 8, es posible calcular cualquier termino en la sucesión justo como se hizo al seguir las instrucciones 1 y 2. La ecuación 8 proporciona un ejemplo de relación de recurrencia dado que define una sucesión expresando el n-ésimo valor en termino de ciertos predecesores. Para que una relación de recurrencia defina una sucesión, debe proporcionarse un valor o valores de "inicio", como en la ecuación 7. Estos valores de inicio se llaman condiciones iniciales.

Por lo tanto podemos definir una relación de recurrencia para la sucesión $a_0, a_1, \cdots$ es una ecuación que relaciona a_n con ciertos predecesores $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$.
Las condiciones iniciales para una sucesión $a_0, a_1, ...$ son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión.

2.1 Solución de relaciones de recurrencia

Resolver una relación de recurrencia que implica una sucesión $a_0, a_1, \cdots$ significa encontrar una fórmula explícita para el término general a_n. En esta sección se estudian dos métodos para resolver relaciones de recurrencia: el de iteraciones y un método especial que se aplica a relaciones de recurrencia homogéneas lineales con coeficientes constantes.

2.1.1 Método iterativo

Para resolver una relación de recurrencia que implica la sucesión $a_0, a_1, \cdots$ por iteración, se usa la relación de recurrencia para escribir el n-ésimo término a_n en términos de algunos de sus predecesores $a_{n-1}, \cdots, a_0$. Después se usa la relación de recurrencia de manera sucesiva para sustituir cada uno de $a_{n-1}, \cdots$ por algunos de sus predecesores.

Ejemplo 1
Resolver la siguiente relación de recurrencia mediante el método iterativo

$$a_n = a_{n-1} + 3 \tag{9}$$

sujeta a la condición inicial $a_1 = 2$.
Sustituimos a n por $n - 1$ en la ecuación (9) para relacionarla con su predecesor y nos queda

$$a_{n-1} = a_{(n-1)-1} + 3$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 3 \tag{10}$$

sustituimos la ecuación 10 en la ecuación 9 para dejarla en términos de a_n

$$a_n = (a_{n-2} + 3) + 3$$
$$a_n = a_{n-2} + 3 + 3$$

Lo que es equivalente a

$$a_n = a_{n-2} + 2 * 3 \tag{11}$$

Sustituimos nuevamente n por $n - 1$ en la ecuación 10 para relacionarla con su siguiente predecesor

$$a_{(n-1)-1} = a_{(n-1)-2} + 3$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + 3 \tag{12}$$

sustituimos la ecuación 12 en la ecuación 11 para dejarla en términos de a_n

$$a_n = (a_{n-3} + 3) + 2 * 3$$

$$a_n = a_{n-3} + 3 + 2 * 3$$

Lo que es equivalente a

$$a_n = a_{n-3} + 3 * 3 \tag{13}$$

Observe como existe un patrón entre la ecuación 11 y 13 donde de manera general podemos decir que la relación de recurrencia toma la forma:

$$a_n = a_{n-k} + 3k \tag{14}$$

Sustituimos k por $n-1$ en la ecuación 14 para dejarla en términos de la condición de inicio a_1

$$a_n = a_{n-(n-1)} + 3 * (n-1)$$

$$a_n = a_1 + 3(n-1) \tag{15}$$

Finalmente expresamos la fórmula explícita que describe la función de recurrencia tomando en cuenta que $a_1 = 2$ por la condición de inicio

$$a_n = 2 + 3(n-1) \tag{16}$$

La ecuación 16 representa de forma explícita la forma recursiva de la ecuación 9 dado que es la solución a la relación de recurrencia propuesta.

Ejemplo 2
Resolver la siguiente relación de recurrencia mediante el método iterativo

$$s_n = 2s_{n-1} \tag{17}$$

Con condición inicial $s_0 = 1$

Solución: Buscamos el predecesor de 17

$$s_{n-1} = 2s_{n-2} \tag{18}$$

La dejamos en términos de n

$$s_n = 2 * 2 * s_{n-2} \tag{19}$$

buscamos el predecesor de 18

$$s_{n-2} = 2s_{n-3} \tag{20}$$

La dejamos en términos de n

$$s_n = 2 * 2 * 2 * s_{n-3} \tag{21}$$

Observando las ecuaciones 19 y 21, podemos decir que la relación de recurrencia toma la forma

$$s_n = 2^k s_{n-k} \tag{22}$$

finalmente sustituimos k por n en la ecuación 22 para dejarla en términos de la condición inicial s_0 y sustituirla, por lo tanto

$$s_n = 2^n S_0$$

$$s_n = 2^n \tag{23}$$

2.1.2 Relaciones de Recurrencia Lineales Homogéneas

Una relación de recurrencia homogénea lineal de orden k con coeficientes constantes es una relación de recurrencia de la forma

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}, c_k \neq 0. \tag{24}$$

donde este tipo de relación de recurrencia debe tener k condiciones iniciales

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \cdots, a_{k-1} = c_{k-1}$$

En el presente documento nos centraremos en las relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes contantes de primero y segundo orden.

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas de primer orden

Dada la generalización de la ecuación 24, resulta sencillo deducir que una relación de recurrencia lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes es de la forma

$$a_n = ca_{n-1} \tag{25}$$

y la solución a este tipo de relación de recurrencia donde $n \geq 0$, c es una constante y $a_0 = A$, es única y está dada por

$$a_n = Ac^n \tag{26}$$

Lo cual se puede verificar mediante el ejemplo dos (ecuación 17), el cual corresponde a una relación de recurrencia de este tipo y se puede solucionar de manera directa según la definición anterior.

Ejemplo

Resuelva la relación de recurrencia $a_n = 7a_{n-1}$, donde $n \geq 1$ y $a_2 = 98$

Solución
Según la definición sabemos de manera directa que nuestra relación de recurrencia toma la forma $a_n = a_0(7^n)$ sin embargo carecemos de la condición inicial a_0, pero podemos sustituirla si conocemos algún valor para a_n, por ejemplo si $a_2 = 98$

$$a_2 = 98 = a_n = a_0(7^2)$$

por lo tanto

$$98 = a_0(7^2)$$

despejamos a_0

$$a_0 = 2$$

Quedando la forma explícita a la relación de recurrencia de la siguiente manera

$$a_n = 2(7^n) \tag{27}$$

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas de segundo orden

Una relación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} \tag{28}$$

Con base en la solución de las relaciones de recurrencia de primer orden buscaremos una solución del tipo $a_n = ct^n$, que al sustituir en 28 tendremos

$$ct^n = c_1ct^{n-1} + c_2ct^{n-2}$$

Lo que al dividir toda la expresión entre ct^{n-2} e igualando a cero tendremos

$$t^2 - c_1 t - c_2 = 0 \tag{29}$$

donde 29 es una ecuación cuadrática llamada ecuación característica, por lo que las raíces r_1 y r_2 pueden estar en alguno de los siguientes casos a) reales y distintos, b) reales con multiplicidad dos o c)complejos conjugados. sin embargo solo abordaremos los primeros dos casos, si se desea saber mas sobre el tercer caso se recomienda la siguiente lectura [1, pag. 477-478]

Caso A: Raíces reales y distintas
Teorema: Sea

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{30}$$

una relación de recurrencia homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Si S y T son soluciones de ecuación (30), entonces $U = bS + dT$ también es una solución de ecuación (30). Si r es una raíz de ecuación (29) entonces la sucesión r^n, $n = 0, 1, \cdots$, es una solución de ecuación (30). Si a es la sucesión definida por ecuación (30),

$$a_0 = c_0 \text{ y } a_1 = c_1$$

entonces existen constantes b y d tales que

$$a_n = br_1^n + dr_2^n \tag{31}$$

Ejemplo
Resolver la relación de recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \tag{32}$$

y condiciones iniciales $a_0 = 7$ y $a_1 = 16$

Solución: Como sabemos que es una relación de recurrencia de orden dos podemos darle la forma $a_n = t^n$

$$t^n = 5t^{n-1} - 6t^{n-2}$$

Lo que es equivalente a

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \tag{33}$$

Factorizamos y encontramos las raíces $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$. Por lo tanto $S_n = 2^n$ y $T_n = 3^n$ y por definición si S y T son soluciones de la relación de recurrencia, entonces $bS+dT$, donde b y d son números cualesquiera, también lo son

$$U_n = bS_n + dT_n$$

$$U_n = b2^n + d3^n \tag{34}$$

por lo tanto u es una solución de 32 y para satisfacer las condiciones iniciales, debe tenerse.
para la condición inicial a_0

$$7 = U_0 = b2^0 + d3^0$$

$$7 = b + d \tag{35}$$

para la condición inicial a_1

$$16 = U_0 = b2^1 + d3^1$$

$$16 = 2b + 3d \tag{36}$$

resolvemos el sistema de ecuaciones 35 y 36. Donde $b = 5$ y $d = 2$. Finalmente sustituimos estos resultados en la ecuación 34

$$U_n = 5(2^n) + 2(3^n) \tag{37}$$

Donde la ecuación 37 corresponde a la forma explícita de la solución de la relación de recurrencia.

Caso B: Raíces reales de multiplicidad dos
Teorema: Sea

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{38}$$

una relación de recurrencia homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Sea a una sucesión que satisface a ecuación (38) y

$$a_0 = c_0 \text{ y } a_1 = c_1$$

Si ambas raíces de

$$t^2 - c_1 t - c_2 = 0$$

son iguales a r, entonces existen constantes b y d tales que

$$a_n = br^n + dnr^n \tag{39}$$

Ejemplo
Resolver la relación de recurrencia

$$a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) \tag{40}$$

y condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 1$

Solución:
Como sabemos que es una relación de recurrencia de orden dos podemos darle la forma $a_n = t^n$

$$t^n = 4(t^{n-1} - t^{n-2})$$

Lo que es equivalente a

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \tag{41}$$

Factorizamos y encontramos las raíces $r_1 = r_2 = 2$. Por lo tanto nuestra solución sera del tipo

$$a_n = b2^n + dn2^n \tag{42}$$

para satisfacer las condiciones iniciales, debe tenerse.
para la condición inicial $a_0 = 1$

$$a_0 = b2^0 + d(0)2^0$$

$$1 = b \tag{43}$$

para la condición inicial $a_1 = 1$

$$a_1 = b2^1 + d(1)2^1$$

$$1 = 2b + 2d \tag{44}$$

Sustituimos 43 en 44 y nos queda $s = -\frac{1}{2}$, que al sustituirlo en 42

$$a_n = 2^n - \frac{1}{2}n2^n$$

Sin embargo observe que esta expresión se puede simplificar pues $\frac{1}{2}n2^n$ es equivalente a $2_{-1}n2^n$ y aplicando reglas de los exponentes tenemos

$$a_n = 2^n - n2^{n-1} \tag{45}$$

donde la ecuación 45 es la solución explícita a la relación de recurrencia.

References

[1] R. Grimaldi, *Matemáticas discreta y combinatoria: introduccián y aplicaciones.* Pearson Educación, 1998.

[2] R. Johnsonbaugh and M. G. Osuna, *Matemáticas discretas.* Pearson Educación, 2005.

[3] K. H. Rosen and J. M. P. Morales, *Matemática Discreta y sus Aplicaciones.* 2004.

[4] I. S. Sominiski, *El Método de la Inducción Matemática.* 1990.