Ciencias computacionales

Propedeutico: Matemáticas Discretas

INAOE

Contenido

1 Relaciones y Funciones

Material multimedia recomendado:

- https://www.youtube.com/watch?v=rFexPRbJLlw
- https://www.youtube.com/watch?v=RDxwk9Vjth4
- https://www.youtube.com/watch?v=MKOC0pT-FOU
- https://www.youtube.com/watch?v=3aStaXO6uU8

Esta sección se extiende de la teoría de conjuntos para incluir los conceptos de relación y función.

1.1 Relaciones

1.1.1 Tupla

Una **tupla** es una **lista ordenada** de elementos. Depediendo de la longitud de la lista hablamos de $0-tupla$ (la secuencia vacía), $1-tupla$ (un elemento), $2-tupla$ (un par ordenado), etc., hasta la tupla $n-tupla$ (secuencia de n-elementos).

1.1.2 Relaciones n-arias

Una relacion (n-aria) $\Re$ es un **subconjunto del producto cartesiano** (ver sección 1.6 de Conjuntos) de n conjuntos $A_1 \times \cdots \times A_n$.

$$\Re \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$$

$\Re$ consiste de un conjunto de n-tuplas, tal que el i-ésimo elemento de la tupla proviene del conjunto A_i. Se dice que $\Re$ es un conjunto de conjuntos y no hay restricción en la elección del posible suconjunto del producto cartesiano (asociaciones o tuplas): cualesquiera elementos a_{ik} de cualquier A_i puede participar en 0, 1 o cualquier numero de asociaciones como se muestra en la Figura 1)

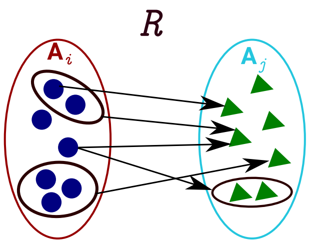
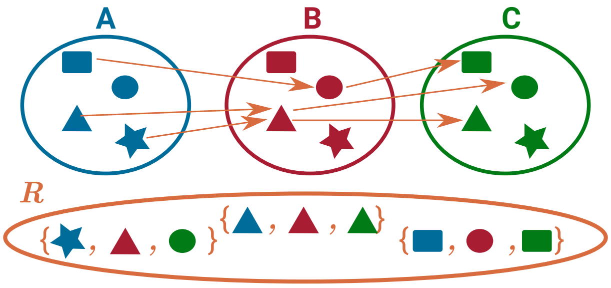


Figura 1: Ejemplo de relaciones entre los conjunto A_i y A_j

En una relación $\Re$ de n conjuntos $A_1 \times \cdots \times A_n$, a A_j se denominan los **dominios** de la relacion y a n se le denomina el **grado** de la relación, y se cumple que $n \geq 0$ (dependiendo del valor de n la relación se denomina n-aria).

Ejemplo 1

Sean los conjuntos A, B y C, $\Re = A \times B \times C$:



Ejemplo 2

Supongamos los conjuntos:

- Alumno = {Juan, María, Pepe, Luis, Pedro}
- Profesor = {Santiago, Pilar, Pablo, Rosa}
- Asignatura = {Matemáticas, Lengua, Filosofía}
- Horario = {10 am, 11 am, 12 pm, 13 pm}

La relación 4-aria $\Re_{curso}$ se define sobre los dominios anteriores:

$\Re_{curso} = \{$ (Juan, Santiago, Lengua, 11 am), $\ldots\}$

1.1.3 Relación binaria

En particular, si $n = 2$ entonces se dice que la relación es **binaria** y a menudo se denota

$$X \Re Y$$

donde:

- X se conoce como el **dominio**
- Y el llamado **co-dominio** y
- $\Re$ es la **regla de correspondencia**

Definición

Dados dos conjuntos A y B, una **relación binaria** $\Re$ de A a B es determinada por un **subconjunto** $\Re \subseteq A \times B$.

- Se dice que $a \Re b$ si y solo si $(a, b) \in \Re$.
- Si $A = B$, se dice que $\Re$ es una relación binaria sobre A

De acuerdo con esta definición, se denota $A \Re B$ en el caso de referirse a la relación de los conjuntos, o $a \Re b$ en el caso de referirse a la relación de los elementos y se lee "A/a está relacionado con B/b". A A se le denomina el conjunto **dominio** o **inicio** y a B se denomina el conjunto **co-dominio** o **destino**.

Ejemplo 1

Sea $U = \{1, 2, 3, ..., 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$, las siguienes son relaciones de A a B

a) $\emptyset$

b) $\{(2,4)\}$

c) $\{(2,4),(2,5)\}$

d) $\{(2,4),(3,4),(4,4)\}$

e) $\{(2,4),(3,4),(4,5)\}$

f) $A \times B$

De acuerdo con el ejemplo anterior, como $|A \times B| = |A||B| = 6$ [1], por la definición se deduce que hay 2^6 relaciones posibles de A a B. En general, para conjuntos finitos A, B donde $|A| = m$ y $|B| = n$ hay 2^{mn} relaciones de A a B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Ejemplo 2

Sea

- $B = \{1,2\} \subseteq \mathbb{N}$
- $U = P(B)$ (Conjunto Potencia)
- $A = U = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

La relación binaria en A es:

$$\Re = \{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{1,2\}),$$
$$(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,2\})\}$$

➠Nótese que en los ejemplos anteriores no se ha especificado la **regla de correspondencia**, es decir, la manera en que están relacionados los conjuntos.

Ejemplo 3

Si $A = U = \mathbb{Z}^+$, se define una relación binaria $\Re$ en el conjunto A como $\{(x,y)|x \leq y\}$. Es decir, se trata de la conocida relacion "***es menor o igual que***" para el conjunto de los enteros positivos. Se observa que:

- $(7,7) \in \Re$
- $(8,2) \notin \Re$
- $(7,11) \in \Re$

Lo anterior puede ser denotado como $7\Re7$, $7\Re11$ y $8 \not\Re 2$. Estos son ejemplos de la notación *infija* en una relación.

➠NOTA: Para este ejemplo, la regla de correspondecia es "***es menor o igual que***".

1.1.4 Ejercicios

1. Sean el conjunto $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, determine la relación binaria sobre A, "**divisible por**" (con residuo 0).

   Solución:

$$\begin{aligned}\Re_/ &= \{(x,y) \in A \times A | mod(y,x) = 0\} \\ &= \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6), \\ &\quad (4,4),(4,8),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8)\}\end{aligned}$$

2. Sea el conjunto $A = \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, determine la relación binaria sobre A "**cuadrado de** ".

   Solución:

$$\Re_{\wedge 2} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x^2\}$$

[1] ver **Definición 2** de subtema **Producto Cartesiano** del material de Conjuntos

3. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determine la relación binaria sobre A "**menor que** ".

   Solución:
$$\begin{aligned}\Re_{<} &= \{(x, y) \in A \times A | x < y\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}\end{aligned}$$

4. Determine la relación de igualdad "=" en $\mathbb{R}$.

   Solución:
$$\Re_{=} = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

1.2 Propiedades de las relaciones

1.2.1 Reflexividad

Una relación $\Re$ en A es ***reflexiva*** si:

- Si $(a, a) \in \Re$ para toda $a \in A$

Esto quiere decir que una relación $\Re$ es reflexiva si cada elemento a de A está relacionado consigo mismo.

1.2.2 Antireflexividad

Una relación $\Re$ en A es ***antireflexiva*** si:

- Si $(a, a) \notin \Re$ para toda $a \in A$

Esta propiedad también es llamada **irreflexiva**.

Debe notarse que esta propiedad no es la negación de la anterior, pues aunque una relación no puede tener ambas propiedades, puede ocurrir que no tenga ninguna de las dos.

1.2.3 Simetría

Una relación $\Re$ en A es ***simétrica*** si:

- Si $(a, b) \in \Re$ y $(b, a) \in \Re$ para todo $a, b \in A$.

1.2.4 Antisimetría

Una relación $\Re$ en A es ***antisimétrica*** si:

- Si $(a, b) \in \Re$ entonces $(b, a) \in \Re$ entonces $a = b$

➠Antes de cometer el error de pensar que "**no simétrica**" es sinónimo de "**antisimétrica**", téngase en cuenta lo siguiente:

> Para $A = \{1, 2, 3\}$, la relación $\Re$ en A dada por $\Re = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ no es simétrica porque $(3, 2) \not\Re$, y tampoco es antisimétrica, pues $(1, 2), (2, 1) \not\Re$ pero $1 \neq 2$. La relación $\Re_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ es simétrica y antisimétrica.

1.2.5 Transitividad

Una relación $\Re$ en A es ***transitiva*** si:

- Si $(a, b) \in \Re$ y $(b, c) \in \Re$ entonces $(a, c) \in \Re$ para todo $a, b \in A$.

Ejemplo 1

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere las siguientes relaciones $\Re$ sobre A y determine si son reflexivas:

- $\Re = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
  - **No es reflexiva**. Para que sea reflexiva debe contener un (a,a) para **TODA** $a \in A$, y en el ejemplo falta el par ordenado (4,4).
- $\Re = \{(x,y)|x,y \in A,\ x \leq y\}$
  - **Es reflexiva**. Si desarrollamos la relación tenemos:

$$\begin{array}{lllll} \Re = \{ & (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4) \\ & (2,2), & (2,3), & (2,4) & \\ & (3,3), & (3,4) & & \\ & (4,4) & \} & & \end{array}$$

    se cumple que para **TODO** $a \in A$, (a,a) es elemento de $\Re$

Ejemplo 2

Sea $A = \{1,2,3\}$ y $\Re$ una relación en A.

- $\Re = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$
  - **Simétrica y no reflexiva**.
- $\Re = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$
  - **Reflexiva y no simétrica**
- $\Re = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$
  - **No simétrica y no reflexiva**

Ejemplo 3

Sea $A = \{1,2,3,4\}$

- $\Re = \{(1,1),(2,2),(3,4),(2,4)\}$
  - **Es una relación transitiva en A**.
- $\Re = \{(1,3),(3,2)\}$
  - **No es transitiva**

1.2.6 Ejercicios

1. La relación binaria $\Re_{<}$ sobre $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es:

   a) ¿Reflexiva?
      - **Solución:** No, ya que para ningún $x \in A$ tal que $(x,x) \in \Re$

   b) ¿Irreflexiva?
      - **Solución:** Si, ya que $x \not< x$ para todo $x \in A$

   c) ¿Transitiva?
      - **Solución:** Si, ya que si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$

   d) ¿Simétrica?
      - **Solución:** No, ya que si $x < y$ entonces $y \not< x$

   e) ¿Antisimétrica?
      - **Solución:** No, ya que no es posible que $x < y$ e $y < x$ a la vez

2. La relación binaria $\Re_{\leq}$ sobre $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ es:

a) ¿Reflexiva?

- **Solución:** Si, ya que $x \leq x$ para todo $x \in A$

b) ¿Irreflexiva?

- **Solución:** No, ya que $x \leq x$ para todo $x \in A$

c) ¿Transitiva?

- **Solución:** Si, ya que si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$

d) ¿Simétrica?

- **Solución:** No, ya que si $x \leq y$ entonces no necesariamente $y \leq x$

e) ¿Antisimétrica?

- **Solución:** Si, ya que si $x \leq y$ e $y \leq x$ a la vez, entonces $x = y$

1.3 Clases de equivalencia

1.3.1 Relación de equivalencia

Una relación binaria $\Re$ sobre un conjunto S se dice que es una relación de equivalencia **si y solo si** es:

- Reflexiva,
- Simétrica y
- Transitiva

Las relaciones de equivalencia suelen detonarse con $\sim$, es decir, si $\Re$ es una relación de equivalencia, $a\Re b$ suele denotarse como $a \sim b$

Ejemplo 1

La relación binaria $\Re_=$ sobre A es:

- ¿Reflexiva?: Si, ya que para todo $x \in \Re$ entonces $x = x$
- ¿Transitiva?: Si, ya que si $x = y$ e $y = z$ entonces $x = z$
- ¿Simétrica?: Si, ya que si $x = y$ entonces $y = x$

Por lo tanto, la relación "**igual que**" es una **relación de equivalencia**.

Ejemplo 2

La relación binaria $\Re_\geq$ sobre A es:

- ¿Reflexiva?: Si, ya que para todo $x \in \Re$ entonces $x \geq x$
- ¿Transitiva?: Si, ya que si $x \geq y$ e $y \geq z$ entonces $x \geq z$
- ¿Simétrica?: No, ya que si $x \geq y$ entonces no necesariamente $y \geq x$

Por lo tanto, la relación "**mayor o igual que**" NO es una **relación de equivalencia**.

1.3.2 Clases de equivalencia

Sea $\Re$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Para cada $x \in A$, la **clase de equivalencia** de x, denotado por $[x]$, se define como:

$$[x] = \{y \in A | y\Re x\}$$

Ejemplo 1

Supongamos el conjunto $S = 1, 2, 3, 4, 5$ con la relación

$\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

La relación es

- reflexiva: para todo $x \in S$, $x\Re x$
- simétrica: $x\Re y$ entonces $y\Re x$
- transitiva: $x\Re y$, $y\Re z$ entonces $x\Re z$

Por lo tanto, la relación $\Re$ es una **relación de equivalencia**.

Ya que $\Re$ es una relación de equivalencia, podemos establecer las **clases de equivalencia** para cada $x \in S$.

a) $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   $[1] = \{1, 2, 3\}$
b) $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   $[2] = \{1, 2, 3\}$
c) $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   $[3] = \{1, 2, 3\}$
d) $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   $[4] = \{4\}$
e) $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   $[5] = \{5\}$

Lo anterior puede resumirse como:

$[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$
$[4] = \{4\}$
$[5] = \{5\}$

Una relación de equivalencia $\sim$ **particiona** el conjunto S en clases de equivalencia mutuamente excluyentes o disjuntas. También se cumple que, dada una partición P del conjunto S entonces existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre S, tal que las clases de equivalencia de S forman la partición P.

Ejemplo 2

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\Re = (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)$ entonces $\Re$ es una relación de equivalencia en A,

- $[1] = \{1\}$
- $[2] = \{2, 3\} = [3]$
- $[4] = \{4, 5\} = [5]$

Por lo tanto, $A = [1] \cup [2] \cup [4]$, siendo $[1], [2]$ y $[4]$ particiones.

1.4 Conjunto parcial y totalmente ordenado

1.4.1 Conjunto parcialmente ordenado

Relaciones comunes tales como $\leq$ y $\geq$ en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ definen ordenamientos.

Definición

Una **relación de orden parcial** $\Re$ es una relación definida en un conjunto S que es

- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

Cuando en un conjunto se define una relación de orden, se dice que el conjunto está ordenado con respecto a dicha relación. Al par del conjunto S con su relación de orden $(S, \Re)$ se le llama **conjunto parcialmente ordenado** o **poset**.

Ejemplo 1

Defínase $\Re$ en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ por $x\Re y$, si x divide a y. Entonces,

- $\Re = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ es un orden parcial y
- $(A, \Re)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 2

La relación de divisibilidad $(\mathbb{Z}_+, |)$ es un orden parcial

➠NOTA: La relación de divisibilidad $a|b$ (a "divide" a b) implica que $\exists k \in \mathbb{N}$: $b = ka$

- ¿Reflexiva? Si, ya que para toda $x \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x|x = 1$.

  Por ejemplo, x es divisible por si mismo.
- ¿Transitiva? Si, ya que si $x|y = k_1$ e $y|z = k_2 \Rightarrow x|z = k_1 \cdot k_2$

  $x = 3,\ y = 6,\ z = 12$

  $x|y = 3|6 = 2,\ y|z = 6|12 = 2,\ x|z = 3|12 = 2 \cdot 2$
- ¿Antisimétrica? Si, ya que si $x|y = k$ entonces NO se cumple que $y|x$ a menos que $x = y$

  ➠Observa que: $y|x = (1/k)$, pero $1/k \notin \mathbb{N}$ excepto si $k = 1$, y entonces $x = y$

Ejemplo 3

Para construir una casa hay ciertos trabajos, como excavar los cimientos, que deben realizarse antes de poder comenzar otras fases de la construcción . Si A es un conjunto de tareas que deben realizarse para construir una casa o completar un proceso especial de fabricación, se puede definir una relación $\Re$ en A por $x\Re y$ si x e y denotan la misma tarea o si la tarea x debe realizarse antes de comenzar la y. De esta manera se asigna un orden a los elementos de A, convirtiéndolo en un **conjunto parcialmente ordenado**.

En general si $\Re$ es un orden parcial en A, entonces para cualquier subconjunto B de A, $(B \times B) \cap \Re$ convierte a B en un conjunto parcialmente ordenado, donde el orden parcial de B se induce de $\Re$.

1.4.2 Conjunto totalmente ordenado

Definición

Si $(S, \Re)$ es un conjunto parcialmente ordenado, se dice que S está totalmente ordenado si para **toda** x, $y \in S$ se cumple $x\Re y$ o $y\Re x$. En este caso $\Re$ se denomina **orden total**.

Si cualquier par x e y son comparables entonces es un **orden total**. Un conjunto con un orden total es un **conjunto totalmente ordenado**. Es otras palabras, es un conjunto parcialmente ordenado donde todos los pares de elementos son comparables.

Ejemplo 1

- En el conjunto $\mathbb{N}$, la relación $\Re$ definida por $x\Re y$ si $x \leq y$ es un **orden total**.
- La relación de subconjunto aplicada a $A = P(U)$, $U = \{1, 2, 3\}$ es un **orden parcial**, pero no total:

  $A = P(U) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
  $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in A$, pero ni $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}$ ni $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2\}$.

1.4.3 Diagrama de Hasse

Si $\Re$ es un orden parcial en un conjunto finito A, contruimos un diagrama de Hasse para $\Re$ en A dibujando un segmento de linea de x a y, si $x, y \in A$ con $x\Re y$ y, mucho más importante, si no hay otro elemento $z \in A$ tal que $x\Re z$ y $z\Re y$ (no hay nada entre x e y). Convencionalmente, el diagrama de Hasse se lee de abajo hacia arriba por lo que no es necesario utilizar lazos dirigidos.
➠NOTA: En un diagrama de Hasse:

- No se representa la propiedad reflexiva
  - Como el conjunto está parcialmente ordenado no contiene ciclos otros que los de longitud 1; es decir los reflexivos, y por ende pueden ser "eliminados" de la representación. No es que no existan; sólo que son triviales, y por ende no es necesario indicarlos.
- No se representa la propiedad transitiva
  - Si $a\Re b$ y $b\Re c$, se representan las aristas de a a b y de b a c, pero no es necesario indicar la de a a c.

Ejemplo 1

Con $U = \{1, 2, 3\}$ y $A = P(U)$, $\Re$ es la relación "subconjunto de A". El diagrama de Hasse es el siguiente:

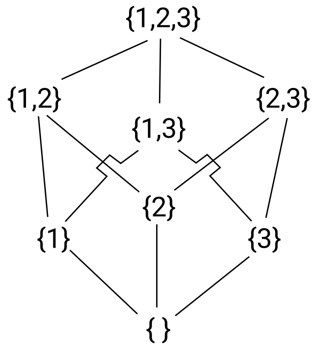


Figura 2: Siendo $A = P(U) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
, el diagrama de Hasse se lee de abajo hacia arriba

1.4.4 Maximal y minimal

Definición

Si $(A, \Re)$ es un conjunto parcialmente ordenado, un elemento $max \in A$ se llama **maximal** de A si para toda $a \in A$, $a\Re max$.

Un elemento $min \in A$ se denomina **minimal** de A si para toda $b \in A$, $min\Re b$.

Ejemplo 1

Sea $U = \{1, 2, 3\}$ y $A = P(U)$

$$P(U) = \{\oslash, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Entonces U es maximal, mientras que $\oslash$ es minimal para este conjunto parcialmente ordenado. En el siguiente diagrama de Hasse (Figura 3) muestra el maximal y el minimal para este ejemplo.

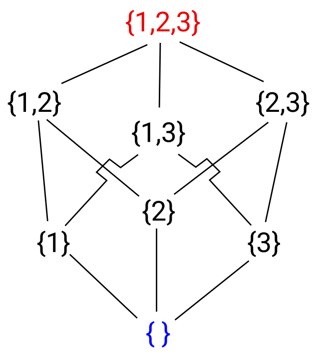


Figura 3: maximal y minimal

Ejemplo 2

Sea B la colección de subconjuntos propios de $\{1, 2, 3\}$.

$$B = \{\oslash, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Sea $\Re$ la relación de subconjunto en B.

En el conjunto parcialmente ordenado, Figura 4, $(B, \subseteq)$, $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ son elementos maximales, mientras que $\oslash$ es el único elemento minimal.

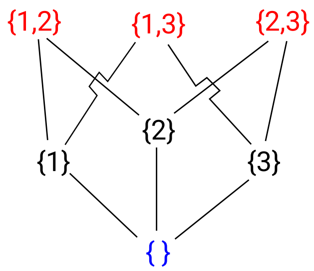


Figura 4: minimal y maximales

Ejemplo 3

Con la relación $\Re$ "es menor o igual que " en el conjunto $\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado sin elemento maximal ni minimal.

No obstante, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ tiene un elemento minimal 0, pero no un maximal.

- **Teorema.** Si $(A, \Re)$ es un conjunto parcialmente ordenado y A es **finito**, entonces A tiene al menos un elemento mininal y uno maximal.
- **Demostración.** Sea $a_1 \in A$. Si no hay elemento $a \in A$, $a \neq a_1$ con $a_1 \Re a$, entonces a_1 es maximal. De no ser así, hay un elemento $a_2 \in A$, $a_2 \neq a_1$, con $a_1 \Re a_2$.

  Si ningún elemento $a \in A$, $a \neq a_2$, cumple $a_2 \Re a$, entonces a_2 es maximal. De lo contrario se puede encontrar $a_3 \in A$, $a_3 \neq a_2$, $a_3 \neq a_1$ con $a_1 \Re a_2$ y $a_2 \Re a_3$. Siguiendo así, como A es finito, se alcanza un elemento $a_n \in A$ con $a_n \not\Re a$ para cualquier $a \neq a_n \in A$, de modo que a_n es maximal.

1.4.5 Máximo y mínimo

Definición

Si $(A, \Re)$ es un conjunto parcialmente ordenado, un elemento $x \in A$ se denomina elemento mínimo si $x \Re a$, para todo $a \in A$. El elemento $y \in A$ se denomina máximo su $a \Re y$ para toda $a \in A$

Ejemplo 1

Sea $U = \{1, 2, 3\}$ y $\Re$ la relación de subconjunto.

a) Con $A = P(U)$

$$A = \{\oslash, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$(A, \subseteq)$ tiene a $\oslash$ como elemento mínimo y a U como máximo (Figura 5).

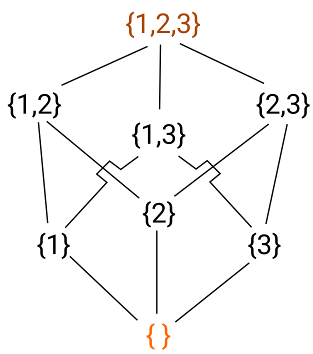


Figura 5: mínimo y máximo

b) Para B = la colección de subconjuntos no vacíos de U. $(B, \subseteq)$ tiene a U como elemento máximo. No existe elemento mínimo, pero si tres elementos minimales, como muestra la Figura 6

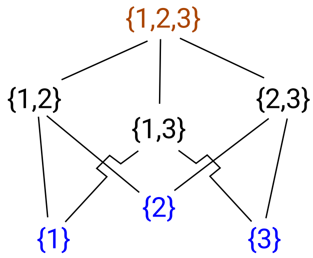


Figura 6: minimales y máximo

Para un conjunto parcialmente ordenado $(A, \Re)$, es posible tener varios elementos maximales y minimales. ¿Qué sucede con los elementos mínimo y máximo?

- **Teorema.** Si el conjunto parcialmente ordenado $(A, \Re)$ tiene algún elemento máximo (mínimo), ese elemento es único.
- **Demostración.** Supóngase que $x, y \in A$ y que ambos son elementos máximo. Como x es un elemento máximo, $y \Re x$. Así mismo, $x \Re y$, pues y es un elemento máximo. Como $\Re$ es antisimétrico, $x = y$.

1.4.6 Cota inferior y cota superior

Definición

Sea $(A, \Re)$ un conjunto parcialmente ordenado con $B \subseteq A$. Un elemento $x \in A$ se llama **cota inferior** de B si $x \Re b$ para toda $b \in B$. Si $y \in A$ y $b \Re y$, para toda $b \in B$, y se denomina **cota superior** de B.

Un elemento $x' \in A$ se llama **máxima cota inferior** o **ínfimo** de B si es una cota inferior de B y si para el resto de las cotas inferiores x'' de B, $x'' \Re x'$. De manera análoga, $y' \in A$ es una **mínima cota superior** o **supremo** de B si es una cota superior de B y para el resto de las cotas superiores y'' de B, $y' \Re y''$.

Ejemplo 1

Sea $\Re$ la relación "es menor o igual que" para el conjunto parcialmente ordenado en el siguiente caso:

- Si $A = \Re$, y $B = [0, 1]$, entonces B tiene máxima cota inferior 0 y mínima cota superior 1. Obsérvese que $0,\ 1 \in B$.
- Para $C = (0, 1]$, C tiene máxima cota inferior 0 y mínima cota superior 1, y $1 \in C$, pero $0 \notin C$.

1.4.7 Red

Definición

El conjunto parcialmente ordenado (A, R) se denomina **red** si para cualquier $x, y \in A$, existen la mínima cota superior $\{x, y\}$ y la máxima cota inferior $\{x, y\}$.

Ejemplo 1

Para $A = \mathbb{N}$, y $x, y \in \mathbb{N}$, defínase $x \Re y$ por $x \leq y$. Entonces mínima cota superior $\{x, y\} = max\{x, y\}$, máxima cota inferior $\{x, y\} = min\{x, y\}$ y $(\mathbb{N}, \leq)$ es una **red**.

1.5 Funciones

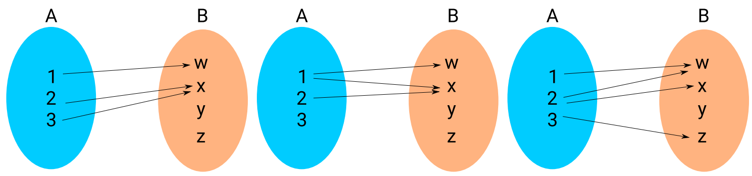
Definición

Dados los conjuntos no vacíos A, B, una función o transformación f de A a B, definida por $f : A \to B$, es una relación de A a B donde cada elemento de A aparece **exactamente una vez** como primera componente de un par ordenado de la relación.

Suele escribirse $f(a) = b$ cuando (a, b) es un par ordenado de la función f. Para $(a, b) \in f$, b se denomina imagen de a en f, mientras que a es un antecedente de b. Además la definición sugiere que f es un método para asociar a cada $a \in A$ una única $b \in B$; este proceso se denota mediante $f(a) = b$. Por tanto, (a, b) , $(a, c) \in f$ implica que $b = c$.

Ejemplo 1

Para $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, $f = \{(1, w), (2, x), (3, x)\}$ es una función y, por tanto una relación de A a B. $\Re_1 = \{(1, w), (1, x), (2, x)\}$, $\Re_2 = \{(1, w), (2, w), (2, x), (3, z)\}$ son relaciones, pero no funciones, de A a B.



(a) Es función (b) No es función (c) No es función

Figura 7: Ejemplo de relación y función de los conjuntos A y B

En la Figura 7, ¿por qué 7b y 7c no son funciones?

Para que sean consideradas como funciones, cada elemento de A debe aparecer exactamente una vez como primera componente de un par ordenado de la relación. En 7b, el 1 está relacionado con w y x; mientras que en 7c, 2 está relacionado con w y x. Por lo tanto, no son funciones.

➠NOTA. Todas las funciones son relaciones, pero no al revés.

Definición

Para la función $f : A \to B$, A y B se denominan **dominio** y **codominio** de f, respectivamente. El subconjunto de B formado por aquellos elementos que aparecen como segundas componentes en los pares ordenados de f, se llama **imagen** o **rango** de f y también se denotan por $f(A)$.

Al conjunto de elementos del conjunto B que la función puede producir se le conoce como rango ($rango \subseteq B$). B sigue siendo conocido como codominio.

Ejemplo 2

Para $A = 1, 2, 3$, $B = w, x, y, z$, $f = (1, w), (2, x), (3, x)$

- El dominio de $f = 1, 2, 3,$
- El codominio de $f = w, x, y, z,$
- y la imagen de $f = f(A) = w, x.$

Una función es una relación binaria que asocia miembros (subconjunto) de un conjunto origen con miembros de otro conjunto destino.

Como las funciones son relaciones binarias, cuando el dominio A y el codominio B son subconjuntos de los reales ($A, B \subseteq \mathbb{R}$), pueden ser fácilmente representadas en el plano, como muestra la Figura 8.

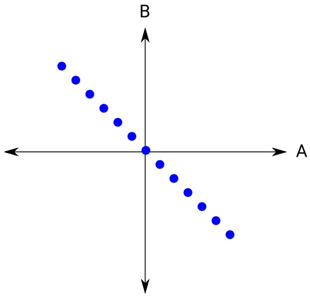
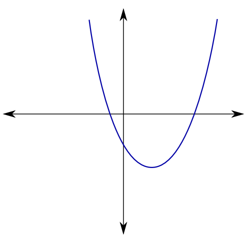


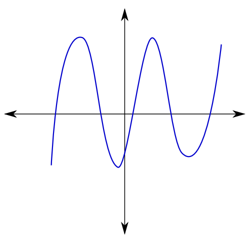
Figura 8: Por defecto, el dominio se representa en el eje de abcisas (A), y el codominio en las ordenadas (B).

Ejemplo 3

Ejemplos de funciones usando planos para representarlas



(a) Función



(b) Función

Con la representación en el plano, un truco para decidir si una relación es una función es el llamado test de la línea vertical. En este test, se traza una línea vertical imaginaria y se "desplaza" de forma perpendicular al eje de abscisa (Figura 9). En una función, **la línea vertical no puede intersectar a la relación en más de un punto a la vez**.

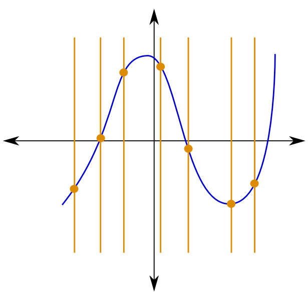
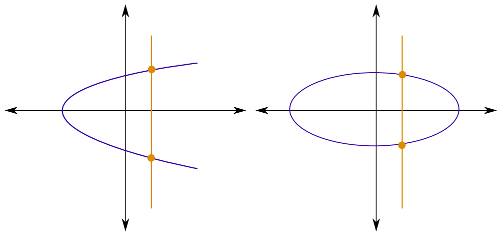


Figura 9: Test de la línea vertical

Ejemplo 4



(a) No es función (b) No esFunción

1.5.1 Ejercicios

1. Sea la función $y = f(x)$ representado en la Figura 10. Encuentre:

   a) $f(0)$
   b) $f(-2)$
   c) Los valores de x para los que $f(x) = 0$
   d) Los valores de x para los que $f(x) = -4$

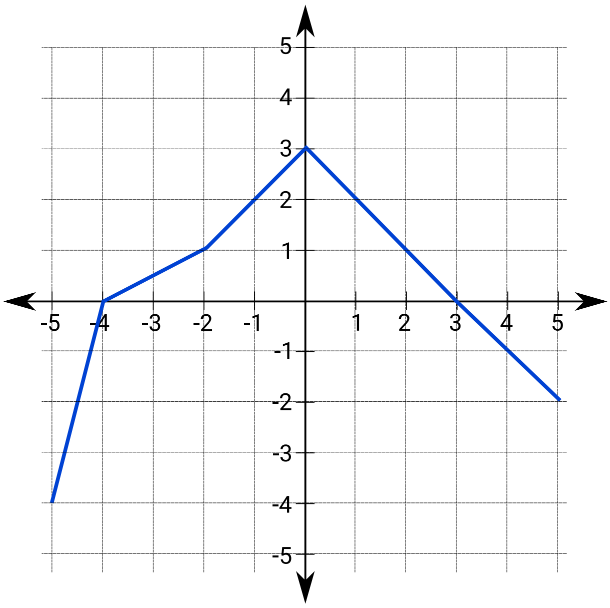


Figura 10: $y = f(x)$

   Solución:

   a) $f(0) = 3$
   b) $f(-2) = 1$
   c) Los valores de x para los que $f(x) = 0 : x = \{-4, 3\}$
   d) Los valores de x para los que $f(x) = -4 : x = -5$

2. Encuentre el dominio de la función:

   a) $f(x) = (x + 7)/(-2x + 1)$
   b) $g(t) = t^2 - 3t$

Solución:

a) $f(x) = (x + 7)/(-2x + 1)$
La función no está definida si $-2x + 1 = 0$, entonces no está definida si $x = 1/2$. Por lo que el valor $1/2$ debe ser excluido del dominio.
   - En notación de intervalo, el dominio de la función es: $D(f) = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, \infty)$.
   - En notación de conjunto el dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - 1/2$.

➠NOTA: el símbolo "\" excluye a 1/2 del conjunto $\mathbb{R}$

b) $g(t) = t2 - 3t$
La función g no tiene restricciones en el dominio, ya que cualquier asignación de un valor a t producirá un valor $g(t)$ válido. Por lo tanto, el dominio queda:
   - En notación de intervalo: $D(f) = (-\infty, \infty)$
   - En notación de conjunto: $D(f) = \mathbb{R}$

3. ¿Cuál es el dominio de la función h dada por $h(w) = \frac{1}{\sqrt{w - w^2 + 6}}$?

   Solución: $-2 < w < 3$

1.6 Tipos de funciones

1.6.1 Función inyectiva

En una función **inyectiva** (o uno-a-uno) cada elemento del codominio es a lo más la imagen de un único elemento del dominio. En otras palabras, dos elementos no pueden tener la misma imagen.

Una función es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Elementos distintos de A tienen siempre imágenes distintas.

Ejemplo 1

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La función $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$ es una función inyectiva de A a B. Mientras que $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ es una función de A a B, aunque no es inyectiva, pues $g(2) = g(3)$, pero $2 \neq 3$.

Ejemplo 2

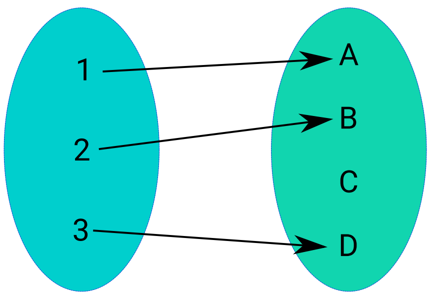


Figura 11: Función inyectiva

1.6.2 Función sobreyectiva

Una función **sobreyectiva** es aquella en donde cada elemento del codominio tiene asociado al menos un elemento del dominio. En otras palabras, la imagen es el codominio completo: $rango = B$

Una función es sobreyectiva si para cada $y \in B$ existe una $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 3

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es una función suprayectiva pero $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por x^2 no lo es, ya que $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo 4

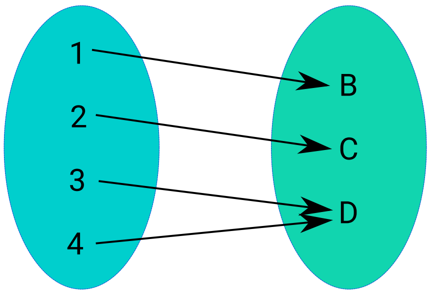


Figura 12: Función sobreyectiva pero no inyectiva

1.6.3 Función biyectiva

Una función **biyectiva** es una función inyectiva que también es sobreyectiva.

Ejemplo 5

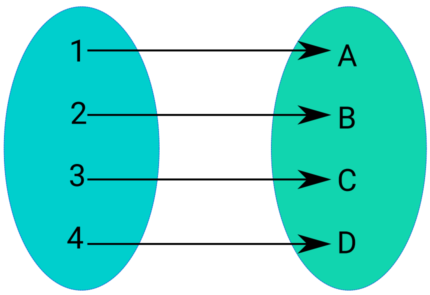


Figura 13: Función inyectiva y sobreyectiva

1.6.4 Ejercicios

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Es $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ una función uno a uno de A a B?

   Solución: No

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$,

   a) ¿Son $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$ y $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$ funciones de A sobre B.
   Solución: Si

   b) La función $g = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$ es suprayectiva?
   Solución: No es suprayectiva, pues $g(A) = \{x, y\} \subset B$.

Bibliografía

[1] Winfried Karl Grassmann and Jean-Paul Tremblay, *Logic and discrete mathematics*, Upper Saddle River, NM: Prentice Hall (1996).

[2] Ralph P Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics, 5/e*, Pearson Education India, 2006.

[3] Donald Johnson, John A Dossey, Albert D Otto, Lawrence E Spence, and Charles Vanden Eynden, *Discrete mathematics, 2d ed.(c)*, JSTOR, 1993.

[4] Richard Johnsonbaugh and Marcia González Osuna, *Matemáticas discretas*, Pearson Educación, 2005.

[5] Bernard Kolman, Robert C Busby, and Sharon Ross, *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*, Pearson Educación, 1997.

[6] Chung Laung Liu and CL Liu, *Elements of discrete mathematics*, McGraw-Hill New York, 1985.

[7] Robert J McEliece, Carol Ash, and Robert B Ash, *Introduction to discrete mathematics*, McGraw-Hill, Inc., 1989.