Ciencias computacionales

Propedéutico: Matemáticas Discretas

INAOE

Contenido

1 Conjuntos

Material multimedia recomendado:

- https://www.youtube.com/watch?v=Hek8Y3FlAm0
- https://www.youtube.com/watch?v=aPxx9_sqAL8
- https://www.youtube.com/watch?v=ybSYaefNC4w
- https://www.youtube.com/watch?v=HDYy88AzjXg

1.1 Introducción

La *matemática discreta*, también llamada matemática finita, comprende el estudio de las estructuras matemáticas fundamentalmente **discretas** en el sentido de no soportar o requerir la noción de **continuidad**. Éstas son necesarias para hacer ciencia de la computación en una forma

- **Confiable** a través de lógica, teoría de conjuntos, relaciones y funciones, estructuras discretas; y
- **Eficiente** haciendo uso de combinatoria, teoría de probabilidad

Esta sección contiene los temas referentes a Teoría de Conjuntos. Los conjuntos son las estructuras más simples pero no triviales de las matemáticas. Otros objetos y propiedades de las matemáticas se definen en base a ellos. En un principio fueron usados para estudiar la noción de ***infinito***. También son útiles en problemas de conteo y teoría de probabilidad.

1.2 Conjuntos y subconjuntos

Un conjunto es una colección **bien definida de elementos**. A estos elementos se les suele llamar *objetos* y se dice que son miembros del conjunto en el que el orden no tiene importancia. El adjetivo "**bien definido**" implica que cualquiera que sea el objeto considerado, se pueda determinar si está o no en el conjunto que se analiza. Para representar **conjuntos** se utilizan las letras mayúsculas, como *A, B, C, ...,*, y minúsculas para los **elementos**.

Ejemplo 1

Dado un conjunto A, se escribe:

$x \in A$ si x **es un elemento** de A ;
$y \notin A$ indica que y **no pertenece** a A

Para denotar un conjunto se utiliza un par de llaves $\{\}$ alrededor de los elementos del conjunto. Se puede determinar un conjunto listando sus elementos entre llaves como:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \textbf{\textit{(determinación extensional)}}$$

Este conjunto también se puede determinar mediante una propiedad que indica *cómo* deben ser los elementos ***(determinación intencional)***. Entonces A también se puede escribir como:

$$A = \{x | x \text{ es un entero, } 1 \leq x \leq 5\}$$

1.2.1 Conjunto universal

Cuando se trata un problema particular, hay un ***universo*** o ***conjunto universal***, formulado o implicado, del cual se seleccionan los elementos para formar los conjuntos. También es llamado *espacio de muestra* S (principalmente en probabilidad)

Ejemplo 1

Lanzar un dado. El conjunto universo o espacio de muestra es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo 2

Para el universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considérese un conjunto $A = \{1, 2\}$. Si $B = \{x|x^2 \in U\}$ los elementos de B son 1,2. Como A y B tiene los mismo elementos se consideran que son el mismo conjunto.

Definición 1

Para el universo U se dice que los conjuntos A y B (tomados de U) **son iguales** y se escribe $A = B$ si A y B contienen los mismos elementos

De esta definición se deduce que ni el orden ni la repetición tiene importancia para un conjunto, de modo que

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 1, 3, 1\}$$

1.2.2 Conjunto finito y conjunto infinito

Ejemplo 1

Para $U = \{1, 2, 3, ...\}$, el conjunto de enteros positivos, sea:

a) $A = \{1, 4, 9, ..., 64, 81\} = \{x^2|x \in U, x^2 < 100\}$
b) $B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2|y \in U, y^2 < 20\}$
c) $C = \{2, 4, 6, 8, ..\} = \{2k|k \in U\}$

Los conjuntos A y B son ejemplos de conjuntos ***finitos***, mientras que C se denomina conjunto ***infinito***.

1.2.3 Cardinalidad

Dado un conjunto finito A

$|A|$ denota el número de elementos en A y se denomina ***cardinalidad*** o ***tamaño*** de A

Ejemplo 1

a) $A = \{1, 4, 9, ..., 64, 81\} = \{x^2|x \in U, x^2 < 100\}$
$|A| = 9$

b) $B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2|y \in U, y^2 < 20\}$
$|A| = 4$

1.2.4 Subconjunto

Definición 1

Si C, D son conjuntos del universo U, se dice que C es un **subconjunto** de D, y se escribe $C \subseteq D$ o $D \supseteq C$ si todo elemento de C es también un elemento de D.

Si existe algún elemento de D que no está en C, C se denomina **subconjunto propio** de D y se denota por $C \subset D$ o $D \supset C$.

$$C \subseteq D \text{ si y solo si } \forall x[x \in C \to x \in D]$$

- **Teorema.** Sea $A, B, C \subseteq U$.

  a) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

  b) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.

  c) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

  d) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Para los conjuntos A, B del universo U puede suceder que A **no sea subconjunto de** B. Esto se expresa por $A \nsubseteq B$ y tiene lugar cuando hay algún elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Ejemplo 1

- En la Figura 1 A es subconjunto de B, esto implica que si ocurre A entonces ocurre B y si ocurre B, no tiene por que ocurrir A.

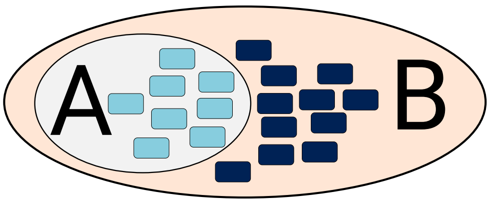


Figura 1: A es subconjunto de B

Ejemplo 2

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones de subconjuntos:

a) $A \subseteq C$

b) $A \subset C$

c) $B \subset C$

d) $A \subseteq A$

e) $B \nsubseteq A$ (es decir, B no es subconjunto de A)

f) $A \not\subset A$

Ejemplo 3

Edad de las personas en años de acuerdo a las siguientes categorías:

1. **Tercera edad.** $A = \{x \geq 65, x \in \mathbb{N}^+\}$
2. **Votante.** $B = \{x \geq 18, x \in \mathbb{N}^+\}$
3. **Servicio Militar.** $C = \{x \geq 18 \text{ y } x < 45, x \in \mathbb{N}^+\}$

$A \subset B; C \subset B; A \not\subset C$

1.2.5 Conjunto Vacío

Definición 1

El conjunto nulo o **vacío** es aquél que **NO contiene elementos** y se denota por $\oslash$ o $\{\}$.

Se observa que $|\oslash| = 0$, pero $\{0\} \neq \oslash$. Es decir, $\oslash$ tiene 0 elementos mientras que $\{0\}$ tiene como elemento a 0. Además, $\oslash \neq \{\oslash\}$, pues $\{\oslash\}$ es un conjunto que contiene como elemento al conjunto vacío.

- **Teorema.** Para cualquier universo U, sea $A \subseteq U$. Entonces $\oslash \subseteq A$; si $A \neq \oslash$, entonces $\oslash \subset A$.

1.2.6 Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

   a) $\{1, 2, 3\}$
   b) $\{3, 2, 1, 3\}$
   c) $\{3, 1, 2, 3\}$
   d) $\{1, 2, 2, 3\}$

   - **Solución:**
     a), b), c) y d)
     Ni el orden ni la repetición tiene importancia para un conjunto.

2. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

   a) $1 \in A$
   b) $\{1\} \in A$
   c) $\{1\} \subseteq A$
   d) $\{\{1\}\} \subseteq A$
   e) $\{2\} \in A$
   f) $\{2\} \subseteq A$
   g) $\{\{2\}\} \subseteq A$
   h) $\{\{2\}\} \subset A$

   - **Solución:**
     a), b), c), d)y f) son verdaderas
     e) el conjunto $\{2\}$ no está en A
     g) y h) el conjunto que tiene como elemento al conjunto $\{2\}$ no es subconjunto ni subconjunto propio de A

3. Sea $A = \{1, 2, \{2\}\}$. ¿Cuáles de las proposiciones del ejercicio anterior son verdaderas?

   - **Solución:**
     a), c), e), f), g) y h)

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

   a) $\oslash \in \oslash$
   b) $\oslash \subset \oslash$
   c) $\oslash \subseteq \oslash$
   d) $\oslash \in \{\oslash\}$
   e) $\oslash \subset \{\oslash\}$
   f) $\oslash \subseteq \{\oslash\}$

- **Solución:**
  c), d), e) y f) son verdaderas

1.3 Operaciones de conjuntos

A continuación se presentan algunas operaciones entre conjuntos.

1.3.1 Complemento

Se dice que un conjunto es el **complemento** de otro conjunto A, si contiene todos los elementos del conjunto universal U que **NO pertenecen** a A, y se denota A^c (Figura 2). También puede escribirse como $\bar{\text{A}}$

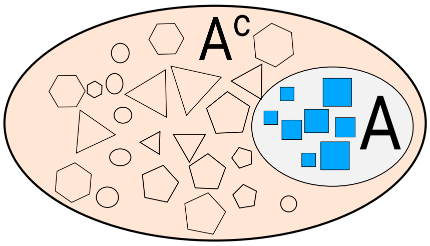


Figura 2: Del conjunto $U = \{\text{figuras geométricas}\}$ donde $A = \{\text{cuadrados}\}$, $A^c = \{\text{todos los que } \textbf{NO} \text{ son cuadrados}\}$

☞ **Propiedades.** Sea A un conjunto y A^c su complemento. Entonces:

- A^c es un conjunto ($A^c \subset U$)
- $(A^c)^c = A$
- $\oslash^c = U$ y $U^c = \oslash$

Ejemplo 1

Al lanzar una moneda se tiene:

1. $A = \{anverso\}$
2. $B = \{reverso\}$

$A = B^c; B = A^c$

Ejemplo 2

Edad de las personas en años de acuerdo a las siguientes categorías:

- **Tercera edad.** $A = \{x \geq 65, x \in N^+\}$
- **Votante.** $B = \{x \geq 18, x \in N^+\}$
- **Servicio Militar.** $C = \{x \geq 18 \text{ y } x < 45, x \in N^+\}$

a) $A^c = \{x < 65,\, x \in N^+\}$;
b) $B^c = \{x < 18,\, x \in N^+\}$;
c) $C^c = \{x < 18 \text{ o } x \geq 45,\, x \in N^+\}$

1.3.2 Complemento relativo

Para $A, B \subseteq U$, el complemento *relativo* de A en B, denotado por $B - A$, está dado por $\{x | x \in B, x \notin A\}$

Ejemplo 1

Para $U = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, se tienen los siguientes conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
- $C = \{7, 8, 9\}$

a) $B - A = \{6, 7\}$

b) $A - B = \{1, 2\}$

c) $A - C = A$

d) $C - A = C$

e) $A - A = \emptyset$

f) $U - A = \{6, 7, 8, 9, 10\} = A^c$

1.3.3 Unión

La unión de dos conjuntos $A \cup B$ es el conjunto que incluye a todos los elementos que pertenecen sólo a A, sólo a B, o a ambos A y B (Ver Figura 3).

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

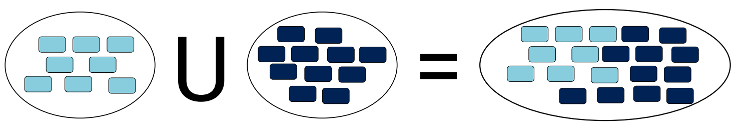


Figura 3: Unión de dos conjuntos

☞ **Propiedades.** Sean A, B y C conjuntos. Entonces:

- $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)
- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup A^c = U$
- $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ y $B = \emptyset$
- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa)

Ejemplo 1

Sean A, B y C los siguientes conjuntos:

- $A = \{ \text{ⓐ}, \circledR \}$
- $B = \{\bigstar, \spadesuit, \clubsuit\}$
- $C = \{\bigcirc, \boxtimes\}$

a) $A \cup B = \{ \text{ⓐ}, \circledR, \bigstar, \spadesuit, \clubsuit\}$

b) $A \cup C = \{\text{ⓐ}, \circledR, \bigcirc, \boxtimes\}$

c) $B \cup C = \{\bigstar, \spadesuit, \clubsuit, \bigcirc, \boxtimes\}$

d) $B \cup A = \{ \text{ⓐ}, \circledR, \bigstar, \spadesuit, \clubsuit\}$

e) $C \cup A = \{\text{ⓐ}, \circledR, \bigcirc, \boxtimes\}$

f) $C \cup B = \{\bigstar, \spadesuit, \clubsuit, \bigcirc, \boxtimes\}$

g) $A \cup B \cup C = \{$ⓐ, ®, ★, ♠, ♣, ○, ☒$\}$

h) $A \cup (B \cup C) = \{$ⓐ, ®, ★, ♠, ♣, ○, ☒$\}$

i) $(A \cup B) \cup C = \{$ⓐ, ®, ★, ♠, ♣, ○, ☒$\}$

1.3.4 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que incluye a aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos, A y B. Es decir, son **SOLO** aquellos elementos que se encuentran en A y B, como se muestra en la Figura 4.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

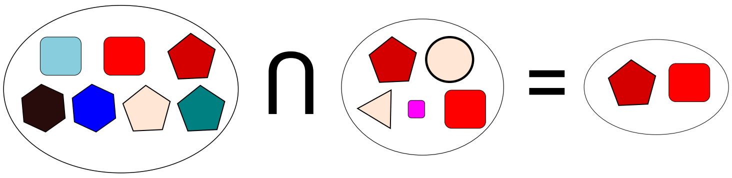


Figura 4: Intersección de dos conjuntos

☞ **Propiedades.** Sean A, B y C tres conjuntos. Entonces:

- $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)
- $A \cap A = A$
- $A \cap \oslash = \oslash$
- $A \cap U = A$
- $A \cap A^c = \oslash$
- Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa)

Ejemplo 1

Sean A, B y C los siguientes conjuntos:

- $A = \{$ ⓐ, ®$\}$
- $B = \{$★, ♣, ⓐ $\}$
- $C = \{$ ⓐ, ♣, ☒$\}$

a) $A \cap B = \{$ ⓐ $\}$

b) $A \cap C = \{$ ⓐ $\}$

c) $B \cap C = \{$♣, ⓐ $\}$

d) $B \cap A = \{$ ⓐ $\}$

e) $C \cap A = \{$ ⓐ $\}$

f) $C \cap B = \{$♣, ⓐ $\}$

g) $A \cap B \cap C = \{$ⓐ $\}$

h) $(A \cap B) \cap C = \{$ⓐ $\}$

i) $A \cap (B \cap C) = \{$ⓐ $\}$

1.3.5 Exclusión mutua

Dos conjuntos A y B son **disjuntos** o **mutuamente excluyentes** si no contienen elementos comunes (Figura 5); es decir, si su intersección es el conjunto vacío.

$$A \cap B = \oslash$$

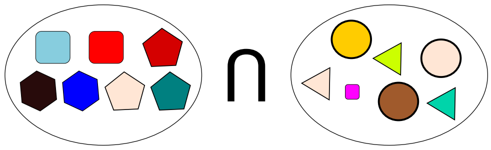


Figura 5: Los Conjuntos disjuntos **NO** tienen elementos en común

Esto implica que si un elemento está en A, entonces no está en B y si un elemento está en B, entonces no está en A.

NOTA. *Los conjuntos y elementos no ocurren.*

Ejemplo 1

Escoger una carta de una baraja española: O-oros, B-bastos, E-espadas, C-copas, Z-sota, C-caballo, R-rey. Las cartas escogidas se dividen en tres grupos

- **Figuras:** $A = \{OZ, OC, OR, BZ, BC, BR, EZ, EC, ER, CZ, CC, CR\}$
- **Oros:** $B = \{O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7, OZ, OC, OR\}$
- **Ases** $C = \{O1, B1, E1, C1\}$

a) $A \cap B = \{OZ, OC, OR\}$ (No son disjuntos)

b) $B \cap C = \{O1\}$ (No son disjuntos)

c) $A \cap C = \{\oslash\}$ (Son disjuntos)

1.3.6 Diferencia simétrica

Dados dos conjuntos A y B, la **diferencia simétrica** es un conjunto que contiene los elementos de A y los de B, excepto los que son comunes a ambos. En otras palabras, el conjunto resultante **NO contiene a los elementos comunes** de ambos conjuntos (Figura 6).

$$A \triangle B = \{x | x \in A \cup x \in B, \text{ pero } x \notin A \cap B\}$$

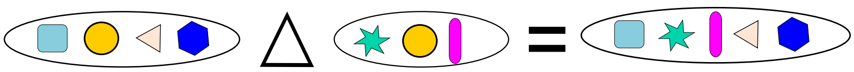


Figura 6: Diferencia simétrica

☞ **Propiedades.** Sean $A \subseteq B$, entonces:

- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \triangle B \subseteq U$
- También se puede decir que en estas operaciones P(U) es **cerrado**, es decir, que el resultado de este tipo de operaciones entre elementos de $P(U)$ está dentro del mismo conjunto.

- **Teorema.** Si S, $T \subseteq U$, $S \cup T = S \triangle T$ si y sólo si S y T son disjuntos.

1.3.7 Generalización de las operaciones de conjuntos

Definición 1

Denótese por I un conjunto de índices. Si para para cada índice $i \in I$ hay un conjunto $A_i \subseteq U$, entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para al menos una } i \in I\} \text{ y}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$$

Obsérvese que $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ si $x \notin A_i$ para todo índice $i \in I$. Si $x \notin A_i$ para al menos un índice $i \in I$, entonces $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$.

Si el conjunto de índices I es el conjunto Z^+, se puede escribir:

$$\bigcup_{i\in Z^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
$$\bigcap_{i\in Z^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Ejemplo 1

Sea $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, y para $i \in I$ sea $A_i = \{1, 2, 3, ..., i\} \subseteq U = Z^+$. Entonces

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=3}^{7} A_i = A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\} = A_7$$

mientras que

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{1, 2, 3\} = A_3$$

1.3.8 Ejercicios

1. Sean los conjuntos
   - $U = \{0, ..., 40\}$
   - $A = \{2, 3, 5, 6, 14, 28, 32\}$
   - $B = \{0, 1, 3, 5, 16, 17, 21, 28, 30, 31, 32, 33\}$
   - $C = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 24, 28\}$

   Encuentre:

   a) $A \cap B$
   b) $B \cup C$
   c) $A \cup (B \cap C)$
   d) $B^c \cap C$

   - **Solución:**
     a) $A \cap B = \{3, 5, 28, 32\}$
     b) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 21, 24, 28, 30, 31, 32, 33\}$
     c) $A \cup (B \cap C) =$
        - Primero se resuelve $(B \cap C) = \{1, 5, 16, 28\}$
        - para hacer la unión con el conjunto A: $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5, 6, 14, 16, 28, 32\}$
     d) $B^c \cap C =$
        - Primero se obtiene el complemento de B:
          $B^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25,$
          $26, 27, 29, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}$
        - $B^c \cap C = \{2, 4, 8, 9, 10, 18, 24\}$

2. Dados los tres colores primarios R, G, y B, Enumere el conjunto universal de una imagen de 3 pixeles, si cada pixel sólo puede tomar un color cada vez
   - **Solución:**$U = \{RRR, RRG, RRB, RGR, RGG, RGB, RBR, RBG, RBB, GRR, GRG, GRB,$
     $GGR, GGG, GGB, GBR, GBG, GBB, BRR, BRG, BRB, BGR, BGG, BGB, BBR, BBG, BBB\}$

3. Con $U = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{7, 8, 9\}$, encuentre:

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $B \cap C$
d) $A \cap C$
e) $A \triangle B$
f) $A \cup C$
g) $A \triangle C$

- **Solución:**
  a) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
  b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  c) $B \cap C = \{7\}$
  d) $A \cap C = \oslash$
  e) $A \triangle B = \{1, 2, 6, 7\}$ (Recuerda que son los elementos que **NO** tienen en común.)
  f) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
  g) $A \triangle C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

4. Para $U = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, y $C = \{7, 8, 9\}$, calcule los complementos de A, B y C.

- **Solución:**
  a) $A^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
  b) $B^c = \{1, 2, 8, 9, 10\}$
  c) $C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

5. Para $U = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, sean A, B, C y $D \subset U$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine lo siguiente:

a) $(A \cup B) \cap C$
b) $A \cup (B \cap C)$
c) $\overline{C} \cup \overline{D}$
d) $\overline{C \cap D}$
e) $(A \cup B) - C$
f) $A \cup (B - C)$
g) $(B - C) - D$
h) $B - (C - D)$
i) $(A \cup B) - (C \cap D)$

- **Solución:**

  a) $\{1, 2, 3, 5\}$
  b) A
  c) $U - \{2\}$
  d) $U - \{2\}$
  e) $\{4, 8\}$
  f) $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
  g) $\oslash$
  h) $\{2, 4, 8\}$
  i) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

1.4 Leyes de la teoría de conjuntos

1.4.1 Proposiciones equivalentes

Las siguientes proposiciones son equivalentes para los conjuntos A, $B \subseteq U$

a) $A \subseteq B$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $B^c \subseteq A^c$

1.4.2 Leyes de la teoría de conjuntos

Para conjuntos cualesquiera A, B y C de un universo U:

1.	$\overline{\overline{A}} = A$	**Doble complemento**
2.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	**De Morgan**
3.	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	**Conmutativas**
4.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**Asociativas**
5.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ A $\cap(B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**Distributiva**
6.	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	**Idempotente**
7.	$A \cup \oslash = A$ $A \cap U = A$	**Identidad**
8.	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \oslash$	**Inversas**
9.	$A \cup U = U$ $A \cap \oslash = \oslash$	**Dominación**
10.	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	**Absorción**

Nótese que las leyes 2 a 10 se representan por pares. Estos pares se llaman **duales**. Una proposición se puede obtener a partir de la otra intercambiando en todos los casos en los que se presente $\cup$ por $\cap$, y viceversa, y donde aparezca U por $\oslash$, y viceversa.

- **Teorema. El principio de la dualidad**

  Sea s un teorema que trata de conjuntos e incluye sólo operaciones con conjuntos $\cup$ y $\cap$, entonces el dual de s, denotado por s^d también es un teorema de la teoría de conjuntos.

  Para cada par de las leyes del 2 al 10 sólo se necesita demostrar una de las preposiciones y reducir a este principio para obtener la otra preposición del par.

Ejemplo 1

Sea e un teorema que trata de conjuntos, el dual e^d de e es el teorema que se obtiene de sustituir cada aparición de $\cup, \cap, \oslash, U$ en e por $\cap, \cup, U, \oslash$, respectivamente.

- e: Leyes de idempotencia:

  1a) $A \cup A = A$ 1b) $A \cap A = A$

1.4.3 Ejercicios

1. Demostrar las propiedades de dominación:

   a) $X \cap \emptyset = \emptyset$

   b) $X \cup U = U$

   - **Solución:**

     a)

$$
\begin{array}{rclc}
X \cap \emptyset & = & (X \cap \emptyset) \cup \emptyset & \text{identidad} \\
 & = & (X \cap \emptyset) \cup (X \cap X^c) & \text{inversa} \\
 & = & X \cap (\emptyset \cup X^c) & \text{distributiva} \\
 & = & X \cap X^c & \text{identidad} \\
 & = & \emptyset & \text{inversa}
\end{array}
$$

     b)

$$
\begin{array}{rclc}
X \cup U & = & (X \cup U) \cap U & \text{identidad} \\
 & = & (X \cup U) \cap (X \cup X^c) & \text{inversa} \\
 & = & X \cup (U \cap X^c) & \text{distributiva} \\
 & = & X \cup X^c & \text{identidad} \\
 & = & U & \text{inversa}
\end{array}
$$

2. Simplifique la expresión $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$

   - **Solución:** Aplicando las leyes de la teoría de conjuntos

$$
\begin{array}{rcc}
= & \overline{\overline{(A \cup B) \cap C}} \cap \overline{\overline{B}} & \text{De Morgan} \\
= & ((A \cup B) \cap C) \cap B & \text{doble complemento} \\
= & (A \cup B) \cap (C \cap B) & \text{asociativa} \\
= & (A \cup B) \cap (B \cap C) & \text{conmutativa de intersección} \\
= & [(A \cup B) \cap B] \cap C & \text{asociativa de la intersección} \\
= & B \cap C & \text{absorción}
\end{array}
$$

1.5 Diagramas de Venn

El diagrama de Venn es la **representación gráfica** de relaciones entre conjuntos; sobre el Universo. El área de los conjuntos es proporcional al número de elementos que contiene. Un diagrama de Venn, se construye como sigue:

- U se representa por el interior de un rectángulo
- Los subconjuntos se representan por círculos interiores y otras curvas cerradas (Figura 7).

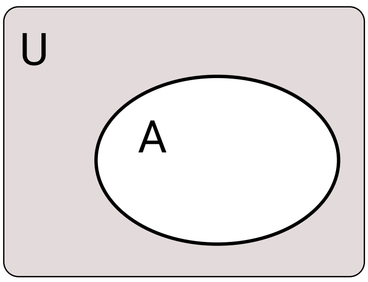
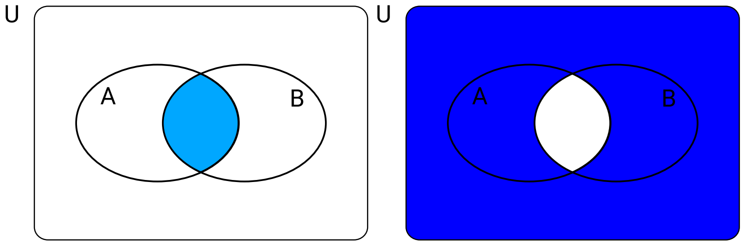


Figura 7: Ejemplo de un diagrama de Venn

Ejemplo 1

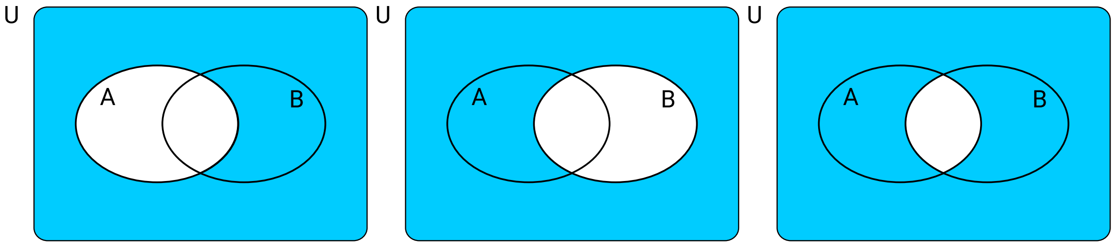
En las Figuras 8 y 9 se usan diagramas de Venn para mostrar una de las leyes de De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



(a) $A \cap B$ (b) $\overline{A \cap B}$

Figura 8: Primera parte de la ley de De Morgan: $\overline{A \cap B}$



(a) $\overline{A}$ (b) $\overline{B}$ (c) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Figura 9: Segunda parte de la ley de De Morgan: $\overline{A} \cup \overline{B}$

1.5.1 Diagrama de Venn numerando regiones

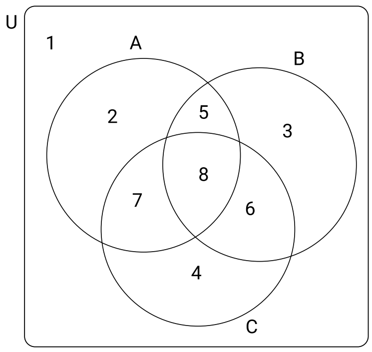
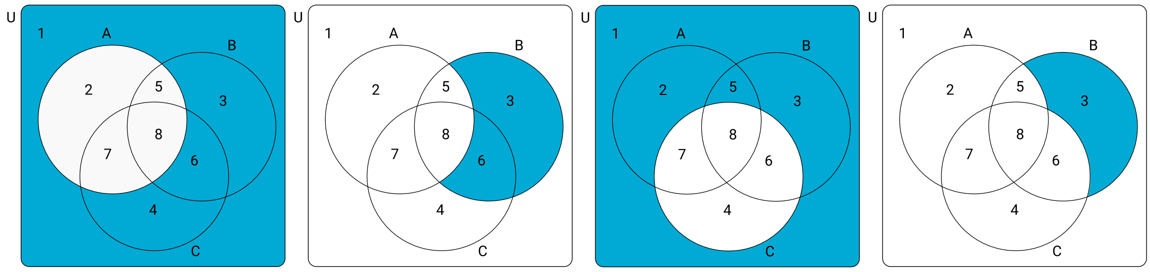


Figura 10: Diagrama de Venn con regiones numeradas

En la Figura 10:

- La región 3 es $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ (véase Figura 11d).



(a) $\overline{A}$ (b) $\overline{A} \cap B$ (c) $\overline{C}$ (d) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

Figura 11: Región 3. Podemos realizar el diagrama de Venn por partes para facilitar el proceso

Cada región es un conjunto de la forma $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ donde S_1 se sustituye por A o $\overline{A}$, S_2 por B o $\overline{B}$, y S_3 por C o $\overline{C}$.

$A \cup B$ (Figura 12) está formado por las regiones 2, 3, 5, 6, 7, 8, de modo que

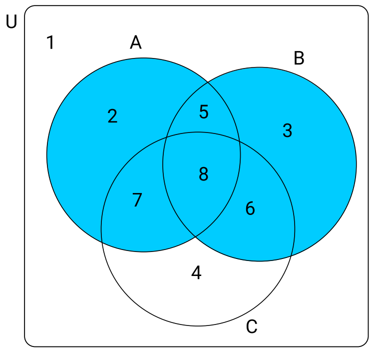


Figura 12: $A \cup B$

$\overline{A \cup B}$ comprende las regiones 1 y 4 (Figura 13)

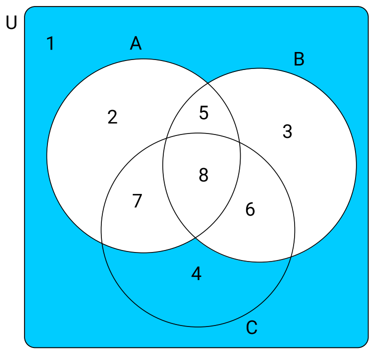


Figura 13: $\overline{A \cup B}$

Al desarrollar $\overline{A \cup B} \cup C$ está formado por las regiones 1, 4, 6, 7, 8 (Figura 14)

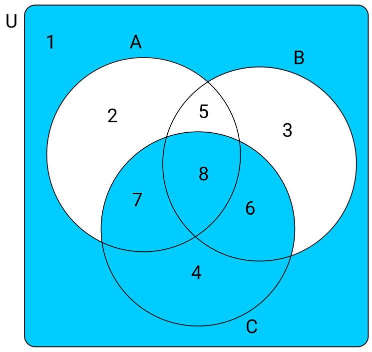


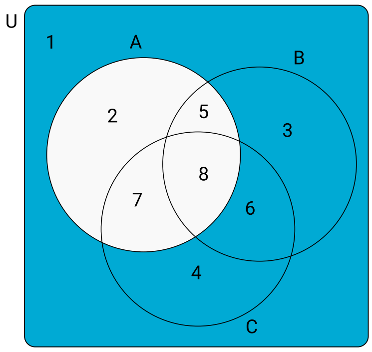
Figura 14: $\overline{A \cup B} \cup C$

1.5.2 Ejercicios

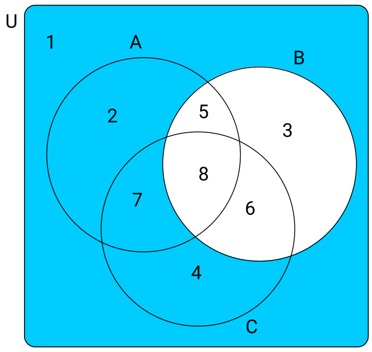
1. Represente con un diagrama de Venn $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup C$

   - **Solución:**

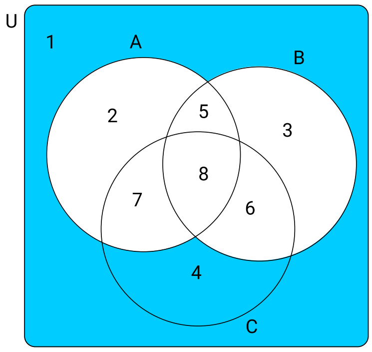
     El conjunto $\overline{A}$ consta de las regiones 1, 3, 4, 6,



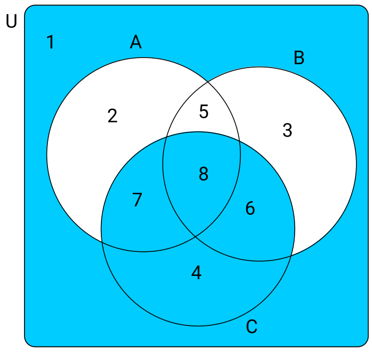
mientras que las regiones 1, 2, 4, 7 forman $\overline{B}$



de modo que las regiones 1 y 4 comprenden $\overline{A} \cap \overline{B}$.



Si se toma la unión de C con $\overline{A} \cap \overline{B}$, se concluye con las regiones 1, 4, 6, 7, 8.



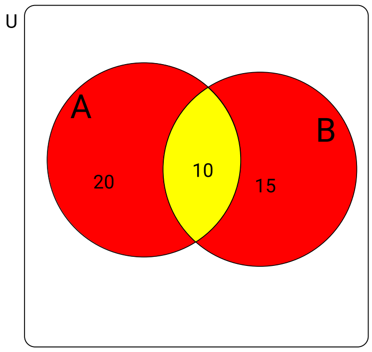
2. En una clase de 50 alumnos de primero de universidad, 30 estudian C++, 25 Java, y 10 los dos lenguajes. ¿Cuántos alumnos estudian un sólo lenguaje de programación?

   - **Solución:**

     Sea U la clase de 50 alumnos, A el subconjunto de los que estudian C++ y B el de los que estudian Java. Primero necesitamos saber cuántos están estudiando algún lenguaje, por lo que necesitamos la cardinalidad de $|A \cup B|$ para restar a aquellos que estudian dos $(|A \cap B|)$.
     Si se suma $|A| + |B|$ da un total de 55 alumnos, esto es debido a que $|A| + |B|$ cuenta dos veces a los alumnos de $|A \cap B|$. Para evitar esta sobrecuenta se resta $|A \cap B|$ de $|A| + |B|$ y se obtiene la fórmula correcta.

     $$|A \cup B| = (|A| + |B|) - (|A \cap B|)$$

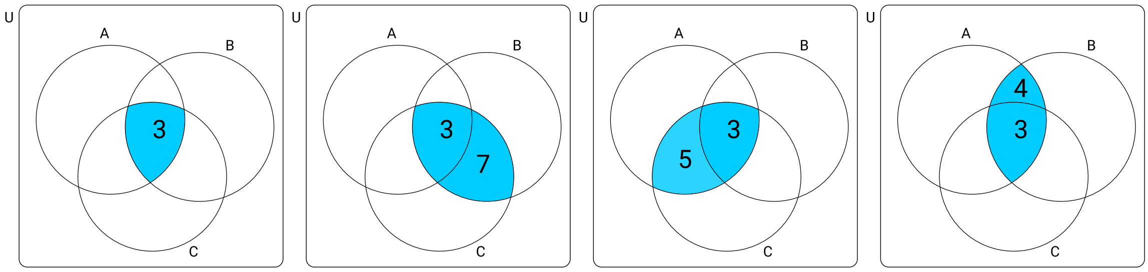
     Los alumnos que estudian un solo lenguaje se muestran en rojo en la figura:



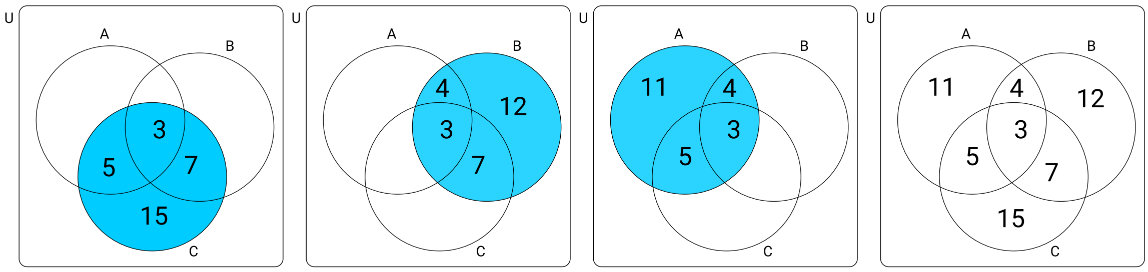
3. Dada una muestra de 100 chips lógicos, sean A, B, C los subconjuntos que tiene los defectos D_1, D_2, D_3, respectivamente. Con $|A| = 23$, $|B| = 26$, $|C| = 30$, $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 10$, $|A \cap B \cap C| = 3$. ¿Cuántos chips de la muestra son defectuosos?

- **Solución:**

  Trabajando hacía atrás desde $|A \cap B \cap C| = 3$, se etiquetan las regiones como se muestra a continuación.



(a) $|A \cap B \cap C| = 3$ (b) $|B \cap C| = 10$ (c) $|A \cap C| = 8$ (d) $|A \cap B| = 7$



(e) $|C| = 30$ (f) $|B| = 26$ (g) $|A| = 23$ (h) A, B, C

1.6 Producto Cartesiano

Definición 1

El producto cartesiano o producto cruz de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b un elemento de B, es decir

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Note que hay una diferencia entre $(a, 2)$ y $(2, a)$, porque para (a, b), $(c, d) \in A \times B$, se tiene que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

Definición 2

El producto cartesiano de los conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ con $n_1, \ldots, n_m$ elementos respectivamente es el conjunto de m-tuplas dado por $A_1 \times A_2 \times \ldots A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) | a_i \in A_i, \text{para } i = 1, \ldots, m\}$. El número de ($m$-tuplas) elementos en este producto cartesiano es

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1||A_2| \ldots |A_m| = n_1 \cdot n_2 \ldots n_m$$

NOTA. Una *tupla* es una lista ordenada de elementos cuyo tamaño dependerá del número de conjuntos involucrados en el producto cartesiano. Este concepto es explicado más ampliamente en el material de **Relaciones y Funciones** (se recomienda revisarlo).

Ejemplo 1

Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y, z\}$, el producto cartesiano (Figura 15) es

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

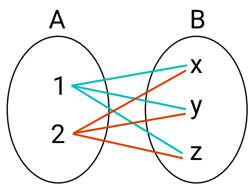


Figura 15: Producto cartesiano

Ejemplo 2

Sean los conjuntos A y B de la Figura 16

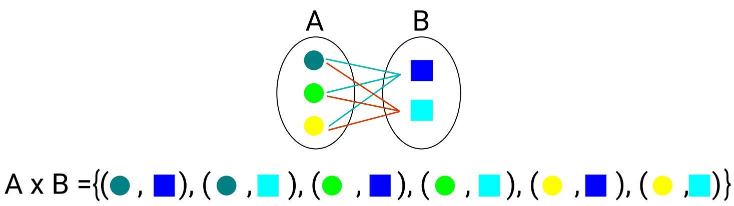


Figura 16: Producto cartesiano

Si A, B son finitos, por la regla del producto resulta que $A \times B = |A| \cdot |B|$. Aunque, en general, **no es cierto** que $A \times B = B \times A$, se tendrá que $|A \times B| = |B \times A|$. Además aunque $A, B \subseteq U$, no es necesario que $A \times B \subseteq U$, de modo que U no es necesariamente cerrado para esta operación.

1.6.1 Ejercicios

1. Sea $U = \{1, 2, 3, ..., 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Determine

   a) $A \times B$

   b) $B \times A$

   c) $B^2 = B \times B$

   d) $B^3 = B \times B \times B$

   - **Solución:**

     a) $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$

     b) $B \times A = \{(4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

     c) $B^2 = B \times B = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

     d) $B^3 = B \times B \times B = \{((4, 4), 4), ((4, 5), 4), ((5, 4), 4), ((5, 5), 4),$
     $((4, 4), 5), ((4, 5), 5), ((5, 4), 5), ((5, 5), 5)\}$

2. Un experimento E se desarrolla de la siguiente forma: se lanza un solo dado y se anota el resultado; a continuación, se lanza una moneda al aire y se anota el resultado. Determínese un espacio muestral M para E.

   - **Solución:**

Denótese por E_1 la primera parte del experimento E y sea $M_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ el espacio muestral para E_1. Así mismo sea $M_2 = \{CA, CZ\}$ el espacio muestral para E_2, la segunda parte del experimento. Entonces, $M = M_1 \times M_2$ es el espacio muestral para E

$$\begin{aligned} M = M_1 \times M_2 = \quad & \{(1,CA),(1,CZ),(2,CA),(2,CZ),(3,CA),(3,CZ), \\ & (4,CA),(4,CZ),(5,CA),(5,CZ),(6,CA),(6,CZ)\} \end{aligned}$$

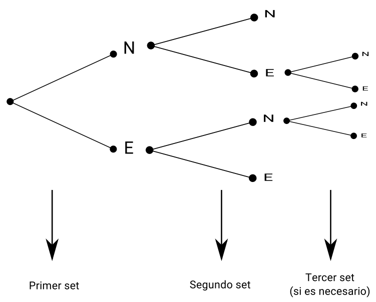
3. En el torneo de tenis de Wimbledon, las mujeres juegan a lo sumo 3 sets en un partido. Triunfa quien gane primero 2 sets. Si N y E representan a las 2 jugadoras. ¿Cuáles son las maneras en que puede ganarse el encuentro?

   - **Solución:**

     Si el espacio muestral de un set es $A = \{N, E\}$ y considerando que:
     * El espacio muestral del segundo set es: $A \times A = \{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$
     * En caso de que una jugadora gane dos veces, se termina el partido: (N,N) o (E,E)
     * Para que se realice un tercer set solo se eliminan los pares donde una jugadora gana dos veces: $A \times A - \{(N,N),(E,E)\}$
     * Finalmente el tercer set es:

     $$(A \times A - \{(N,N),(E,E)\}) \times A$$

     Por lo tanto, los resultados posibles son:
     $(N,N),(E,E),((N,E),N),((N,E),E),((E,N),N),((E,N),E)$



1.7 Conjunto Potencia

El conjunto potencia de un conjunto Ω es el conjunto Σ de todos los subconjuntos de Ω denotado por $P(\Omega)$. Es decir, el conjunto potencia es la colección de todos los subconjuntos de Ω. Para cualquier conjunto finito Ω con $|\Omega| = n$, Ω tiene 2^n subconjuntos, de modo que

$$|P(\Omega)| = 2^n$$

Ejemplo 1

Sea $A = \{x, y, z\}$

El conjunto potencia de A es

$$P(A) = \{\{\},\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$$

1.7.1 Ejercicios

1. Sean los conjuntos $\oslash = \{\}$, $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$ y $D = \{a,b,c,d\}$, determine para cada uno:

   a) El conjunto potencia

b) La cardinalidad del conjunto

c) La cardinalidad del conjunto potencia

- **Solución:**

Conjunto	Cardinalidad del conjunto	Conjunto Potencia	Cardinalidad del Conjunto Potencia
$\oslash = \{\}$	$\mid \oslash \mid = 0$	$P(\oslash) = \{\oslash\}$	$\|P(\oslash)\| = 1$
$A = \{a\}$	$\|A\| = 1$	$P(A) = \{\oslash, a\}$	$\|P(A)\| = 2$
$B = \{a, b\}$	$\|B\| = 2$	$P(B) = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$\|P(B)\| = 4$
$C = \{a, b, c\}$	$\|C\| = 3$	$P(C) = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},$ $\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$	$\|P(C)\| = 8$
$D = \{a, b, c, d\}$	$\|D\| = 4$	$P(D) = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\},$ $\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\},$ $\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$	$\|P(D)\| = 16$

Bibliografía

[1] Ralph P Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics, 5/e*, Pearson Education India, 2006.

[2] Donald Johnson, John A Dossey, Albert D Otto, Lawrence E Spence, and Charles Vanden Eynden, *Discrete mathematics, 2d ed.(c)*, JSTOR, 1993.