

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Gramáticas Libres de Contexto

2 de marzo de 2017

Contenido

- 1 Gramáticas Libres de Contexto
- 2 Definición formal de CFGs
- 3 Derivaciones usando gramáticas
- 4 Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha
- 5 El Lenguaje de la Gramática
- 6 Sentential Forms
- 7 Árboles de Parseo
- 8 Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Gramáticas Libres de Contexto

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Hemos visto que muchos lenguajes no son regulares. Por lo que necesitamos una clase más grande de lenguajes.
- Las Gramáticas Libres de Contexto (*Context-Free Languages*) o CFL's jugaron un papel central en lenguaje natural desde los 50's y en los compiladores desde los 60's.
- Las Gramáticas Libres de Contexto forman la base de la sintaxis BNF.
- Son actualmente importantes para XML y sus DTD's (*document type definition*).

Gramáticas Libres de Contexto

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Vamos a ver los CFG's, los lenguajes que generan, los árboles de parseo, el *pushdown automata* y las propiedades de cerradura de los CFL's.
- **Ejemplo:** Considere $L_{pal} = \{w \in \Sigma^* : w = w^R\}$. Por ejemplo, *oso* $\in L_{pal}$, *anitalavalatina* $\in L_{pal}$,
- Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y supongamos que L_{pal} es regular.
- Sea n dada por el *pumping lemma*. Entonces $0^n 1 0^n \in L_{pal}$. Al leer 0^n el FA debe de entrar a un ciclo. Si quitamos el ciclo entonces llegamos a una contradicción.

Palíndromes

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Definamos L_{pal} de forma inductiva.
- *Base*: ϵ , 0 y 1 son palíndromes.
- *Inducción*: Si w es un palíndrome, también $0w0$ y $1w1$.
- Ninguna otra cosa es palíndrome.

Palíndromes

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Las CFG's son un mecanismo formal para la definición como la de palíndrome.

$$\textcircled{1} P \rightarrow \epsilon$$

$$\textcircled{2} P \rightarrow 0$$

$$\textcircled{3} P \rightarrow 1$$

$$\textcircled{4} P \rightarrow 0P0$$

$$\textcircled{5} P \rightarrow 1P1$$

donde 0 y 1 son símbolos terminales.

Gramáticas Libre de Contexto

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- P es una variable o símbolo no terminal o categoría sintáctica.
- P es en esta gramática también el símbolo inicial.
- 1 – 5 son producciones o reglas. La variable definida (parcialmente) en la producción también se llama la *cabeza* de la producción y la cadena de cero, 1 o más símbolos terminales o variables a la derecha de la producción se llama el *cuerpo* de la producción.

Definición formal de CFGs

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Una gramática libre de contexto se define con $G = (V, T, P, S)$ donde:

- V es un conjunto de *variables*.
- T es un conjunto de *terminales*.
- P es un conjunto finito de *producciones* de la forma $A \rightarrow \alpha$, donde A es una variables y $\alpha \in (V \cup T)^*$.
- S es una variable designada llamada el *símbolo inicial*.

Ejemplos

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Ejemplo:** $G_{pal} = (\{P\}, \{0, 1\}, A, P)$, donde
 $A = \{P \rightarrow \epsilon, P \rightarrow 0, P \rightarrow 1, P \rightarrow 0P0, P \rightarrow 1P1\}$.
- Muchas veces se agrupan las producciones con la misma cabeza, e.g., $A = \{P \rightarrow \epsilon | 0 | 1 | 0P0 | 1P1\}$.
- Ejemplo:** Expresiones regulares sobre $\{0, 1\}$ se pueden definir por la gramática:
 $G_{regex} = (\{E\}, \{0, 1\}, A, E)$, donde $A = \{E \rightarrow 0, E \rightarrow 1, E \rightarrow E.E, E \rightarrow E + E, E \rightarrow E^*, E \rightarrow (E)\}$.

Ejemplo

- Expresiones en un lenguaje de programación donde los operadores son $+$ y $*$, y los argumentos son identificadores (*strings*) que empiezan con a o b en $L((a + b)(a + b + 0 + 1)^*)$.

- Las expresiones se definen por la gramática: $G = (\{E, I\}, T, P, E)$ donde $T = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$ y P es el siguiente conjunto de producciones:

$$1) E \rightarrow I \qquad 2) E \rightarrow E + E$$

$$3) E \rightarrow E * E \qquad 4) E \rightarrow (E)$$

$$5) I \rightarrow a \qquad 6) I \rightarrow b$$

$$7) I \rightarrow Ia \qquad 8) I \rightarrow Ib$$

$$9) I \rightarrow I0 \qquad 10) I \rightarrow I1$$

Derivaciones usando gramáticas

- *Inferencia recursiva* usando las producciones del cuerpo a la cabeza para reconocer si una cadena está en el lenguaje definido por la gramática. Ejemplo de una inferencia recursiva de la cadena: $a * (a + b00)$.

Cadenas	Cabeza	Del Leng. de:	Cadenas usadas
(i) a	I	5	—
(ii) b	I	6	—
(iii) $b0$	I	9	(ii)
(iv) $b00$	I	9	(iii)
(v) a	E	1	(i)
(vi) $b00$	E	1	(iv)
(vii) $a + b00$	E	2	(v),(vi)
(viii) $(a + b00)$	E	4	(vii)
(ix) $a * (a + b00)$	E	3	(v),(viii)

Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Derivaciones

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Derivaciones usando las producciones de la cabeza al cuerpo. Con esto derivamos cadenas que pertenecen a la gramática.
- Para esto introducimos un nuevo símbolo: \Rightarrow
- Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG,
 $A \in V$, $\{\alpha, \beta\} \subset (V \cup T)^*$ y $A \rightarrow \gamma \in P$.
- Entonces, escribimos: $\alpha A \beta \Rightarrow_G \alpha \gamma \beta$ o si se sobre-entiende G : $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$ y decimos que $\alpha A \beta$ *deriva* $\alpha \gamma \beta$.

Cerradura de \Rightarrow

- Definimos \Rightarrow^* como la cerradura reflexiva y transitiva de \Rightarrow . Lo que quiere decir es que usamos uno a más pasos de derivación.
- Ideas:
 - *Base*: Sea $\alpha \in (V \cup T)^*$, entonces $\alpha \Rightarrow^* \alpha$ (osea que cada cadena se deriva a sí misma).
 - *Inducción*: Si $\alpha \Rightarrow^* \beta$, y $\beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow^* \gamma$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

- La derivación de $a * (a + b00)$ a partir de E en la gramática anterior sería:

$$\begin{aligned}
 E &\Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E) \Rightarrow a * (E + E) \Rightarrow \\
 &a * (I + E) \Rightarrow a * (a + E) \Rightarrow a * (a + I) \Rightarrow a * (a + I0) \Rightarrow \\
 &a * (a + I00) \Rightarrow a * (a + b00)
 \end{aligned}$$

- Podemos abreviar y simplemente poner:
 $E \xrightarrow{*} a * (a + b00)$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Derivación e Inferencia

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- La derivación y la inferencia recursiva son equivalentes, osea que si podemos inferir que una cadena de símbolos terminales w está en el lenguaje de una variable A entonces $A \xRightarrow{*} w$ y al revés.
- **Nota 1:** en cada paso podemos tener varias reglas de las cuales escoger, e.g.: $I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * (E)$ o $I * E \Rightarrow I * (E) \Rightarrow a * (E)$
- **Nota 2:** no todas las opciones nos llevan a derivaciones exitosas de una cadena en particular, por ejemplo: $E \Rightarrow E + E$ no nos lleva a la derivación de $a * (a + b00)$.

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

Para restringir el número de opciones para derivar una cadena.

- Derivación más a la izquierda (*leftmost derivation*): \Rightarrow_{lm} siempre reemplaza la variable más a la izquierda por uno de los cuerpos de sus producciones.
- Derivación más a la derecha (*rightmost derivation*): \Rightarrow_{rm} siempre re-emplaza la variable más a la derecha por uno de los cuerpos de sus producciones.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

La derivación anterior la podemos hacer como derivación más a la izquierda:

$$\begin{aligned}
 E &\Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E \Rightarrow_{lm} a * (E) \Rightarrow_{lm} \\
 &a * (E + E) \Rightarrow_{lm} a * (I + E) \Rightarrow_{lm} a * (a + E) \Rightarrow_{lm} \\
 &a * (a + I) \Rightarrow_{lm} a * (a + I0) \Rightarrow_{lm} a * (a + I00) \Rightarrow_{lm} a * (a + b00) \\
 &\text{o simplemente } E \xRightarrow{*}_{lm} a * (a + b00)
 \end{aligned}$$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo (cont.)

Por otro lado, también la podemos hacer más a la derecha:

$$\begin{aligned}
 E &\Rightarrow_{rm} E * E \Rightarrow_{rm} E * (E) \Rightarrow_{rm} E * (E + E) \Rightarrow_{rm} E * (E + I) \Rightarrow_{rm} \\
 &E * (E + I0) \Rightarrow_{rm} E * (E + I00) \Rightarrow_{rm} E * (E + b00) \Rightarrow_{rm} E * (I + \\
 &b00) \Rightarrow_{rm} E * (a + b00) \Rightarrow_{rm} I * (a + b00) \Rightarrow_{rm} a * (a + b00) \\
 &\text{o simplemente } E \Rightarrow_{rm}^* a * (a + b00).
 \end{aligned}$$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Equivalencias

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Cualquier derivación tiene una derivación equivalente más a la izquierda y una más a la derecha.
- Si w es una cadena de símbolos terminales y A es una variable, $A \xRightarrow{*} w$ si y solo si $A \xRightarrow{*}_{lm} w$ y si y solo si $A \xRightarrow{*}_{rm} w$.

El Lenguaje de la Gramática

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Si $G(V, T, P, S)$ es una CFG, entonces el lenguaje de G es: $L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow_G^* w\}$, osea el conjunto de cadenas sobre T^* derivadas del símbolo inicial.
- Si G es una CFG al $L(G)$ se llama *lenguaje libre de contexto*. Por ejemplo, $L(G_{pal})$ es un lenguaje libre de contexto.
- **Teorema:** $L(G_{pal}) = \{w \in \{0, 1\}^* : w = w^R\}$
- **Prueba:** (\Rightarrow) Suponemos $w = w^R$. Mostramos por inducción en $|w|$ que $w \in L(G_{pal})$.

Prueba:

- *Base:* $|w| = 0$ or $|w| = 1$. Entonces w es ϵ , 0 o 1 . Como $P \rightarrow \epsilon$, $P \rightarrow 1$ y $P \rightarrow 0$ son producciones, concluimos que $P \Rightarrow_G^* w$ en todos los casos base.
- *Inducción:* Suponemos $|w| \geq 2$. Como $w = w^R$, tenemos que $w = 0x0$ o $w = 1x1$ y que $x = x^R$.
- Si $w = 0x0$ sabemos de la hipótesis inductiva que $P \Rightarrow^* x$, entonces $P \Rightarrow 0P0 \Rightarrow^* 0x0 = w$, entonces $w \in L(G_{pal})$.
- El caso para $w = 1x1$ es similar.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Palíndrome

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- (\Leftarrow): Asumimos que $w \in L(G_{pal})$ y tenemos que mostrar que $w = w^R$.
- Como $w \in L(G_{pal})$, tenemos que $P \xRightarrow{*} w$. Lo que hacemos es inducción sobre la longitud de $\xRightarrow{*}$.
- *Base*: La derivación de $\xRightarrow{*}$ se hace en un solo paso, por lo que w debe de ser ϵ , 0 o 1, todos palíndromes.

Palíndrome

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- *Inducción:* Sea $n \geq 1$ y suponemos que la derivación toma $n + 1$ pasos y que el enunciado es verdadero para n pasos. Osea, si $P \xRightarrow{*} x$ en n pasos, x es palíndrome. Por lo que debemos de tener para $n + 1$ pasos:
- $w = 0x0 \xleftarrow{*} 0P0 \leftarrow P$ o $w = 1x1 \xleftarrow{*} 1P1 \leftarrow P$ donde la segunda derivación toma n pasos.
- Por la hipótesis inductiva, x es un palíndrome, por lo que se completa la prueba.

Sentential Forms

- Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG y $\alpha \in (V \cup T)^*$. Si $S \xRightarrow{*} \alpha$ decimos que α está en forma de sentencia (*sentential form*).
- Si $S \Rightarrow_{lm} \alpha$ decimos que α es una forma de sentencia izquierda (*left-sentencial form*), y si $S \Rightarrow_{rm} \alpha$ decimos que α es una forma de sentencia derecha (*right-sentencial form*).
- $L(G)$ son las formas de sentencia que están en T^* .

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

- Si tomamos la gramática del lenguaje sencillo que definimos anteriormente, $E * (I + E)$ es una forma de sentencia ya que:

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * (E) \Rightarrow E * (E + E) \Rightarrow E * (I + E).$$
- Esta derivación no es ni más a la izquierda ni más a la derecha.
- Por otro lado: $a * E$ es una forma de sentencia izquierda, ya que: $E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E$ y $E * (E + E)$ es una forma de sentencia derecha, ya que: $E \Rightarrow_{rm} E * E \Rightarrow_{rm} E * (E) \Rightarrow_{rm} E * (E + E)$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Árboles de Parseo

- Si $w \in L(G)$ para alguna CFG, entonces w tiene un árbol de parseo (*parse tree*), el cual nos da la estructura (sintáctica) de w . w puede ser un programa, un *query* en SQL, un documento en XML, etc.
- Los árboles de parseo son una representación alternativa de las derivaciones e inferencias recursivas.
- Pueden existir varios árboles de parseo para la misma cadena.
- Idealmente nos gustaría que existiera solo uno, i.e., que el lenguaje fuera no ambigüo. Desafortunadamente no siempre se puede quitar la ambigüedad.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Construyendo Árboles de Parseo

Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG. Un árbol es un árbol de parseo de G si:

- 1 Cada nodo interior está etiquetado con una variable en V .
- 2 Cada hoja está etiquetada con un símbolo en $V \cup T \cup \{\epsilon\}$. Cada hoja etiquetada con ϵ es el único hijo de su padre.
- 3 Si un nodo interior tiene etiqueta A y sus hijos (de izquierda a derecha) tienen etiquetas: X_1, X_2, \dots, X_k , entonces: $A \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_k \in P$.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

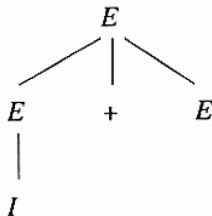
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

En la gramática: $E \rightarrow I$, $E \rightarrow E + E$, $E \rightarrow E * E$, $E \rightarrow (E)$,
 ..., el siguiente es un árbol de parseo:



Este árbol muestra la derivación: $E \xRightarrow{*} I + E$.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

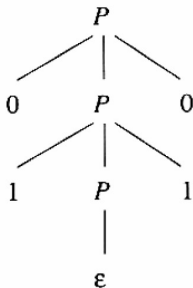
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

En la gramática: $P \rightarrow \epsilon$, $P \rightarrow 0$, $P \rightarrow 1$, $P \rightarrow 0p0$, $P \rightarrow 0p0$, el siguiente es un árbol de parseo:



Este árbol muestra la derivación: $P \xRightarrow{*} 0110$.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

El producto de un árbol de parseo

- El producto (*yield*) de un árbol de parseo es la cadena de hojas de izquierda a derecha.
- Son en especial relevantes los árboles de parseo que:
 - ① El producto es una cadena terminal.
 - ② La raíz esté etiquetada con el símbolo inicial.
- El conjunto de productos de estos árboles de parseo nos definen el lenguaje de la gramática.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

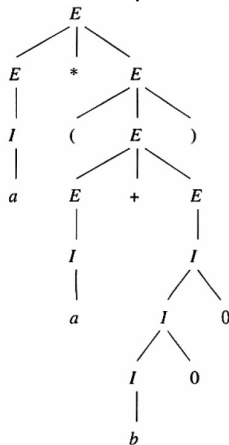
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

Considere el siguiente árbol de parseo:



cuyo producto es: $a * (a + b00)$ (podemos comparar este árbol con la derivación que hicimos antes).

Equivalencias

Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG y $A \in V$. Vamos a demostrar que lo siguiente es equivalente:

- Podemos determinar por inferencia recursiva que w esté en el lenguaje de A .
- $A \Rightarrow^* w$.
- $A \Rightarrow_{lm}^* w$ y $A \Rightarrow_{rm}^* w$.
- Existe un árbol de parseo de G con raíz A que produce w .

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

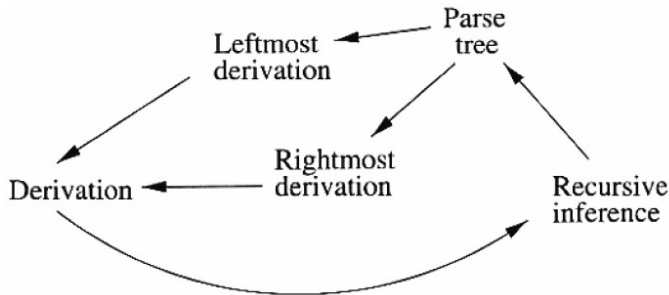
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Equivalencias

El siguiente es el plan a seguir para probar las equivalencias:



Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

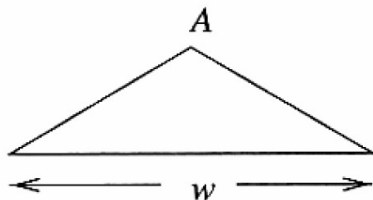
Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

De inferencias a árboles

- **Teorema:** Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG y supongan que podemos mostrar que w está en el lenguaje de una variable A . Entonces existe un árbol de parseo para G que produce w .
- **Prueba:** La hacemos por inducción en la longitud de la inferencia.
- **Base:** Un paso. Debemos de usar la producción $A \rightarrow w$. El árbol de parseo es entonces:



De inferencias a árboles

- *Inducción*: w es inferido en $n + 1$ pasos. Suponemos que el último paso se baso en la producción:
 $A \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_k$, donde $X_i \in V \cup T$.
- Descomponemos w en: $w_1 w_2 \dots w_k$, donde $w_i = X_i$ cuando $X_i \in T$, y cuando $X_i \in V$, entonces w_i fué previamente inferida en X_i en a los más n pasos.
- Por la hipótesis de inferencia existen i árboles de parseo con raíz X_i que producen w_i . Entonces el siguiente en una árbol de parseo de G con raíz en A que produce w :

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

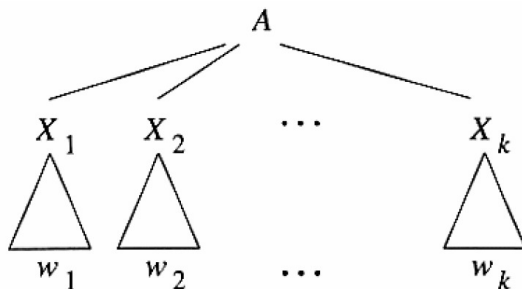
El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

De inferencias a árboles



Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

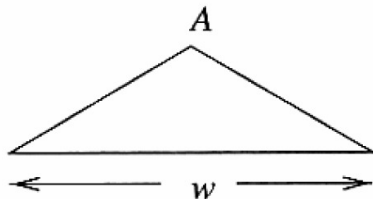
Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

De árboles a derivaciones

- Mostraremos como construir una derivación más a la izquierda de un árbol de parseo.
- **Ejemplo:** De una gramática podemos tener la siguiente derivación: $E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \Rightarrow ab$.
- Entonces, para cualquier α y β existe una derivación $\alpha E \beta \Rightarrow \alpha I \beta \Rightarrow \alpha I b \beta \Rightarrow \alpha a b \beta$.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos la derivación: $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E)$
- Entonces podemos escoger $\alpha = "E + ("$ y $\beta = ")"$ y seguir con la derivación como: $E + (E) \Rightarrow E + (I) \Rightarrow E + (Ib) \Rightarrow E + (ab)$
- Por esto es que las CFG se llaman libres de contexto (substitución de cadenas por variables, independientes del contexto).

De árboles a derivaciones

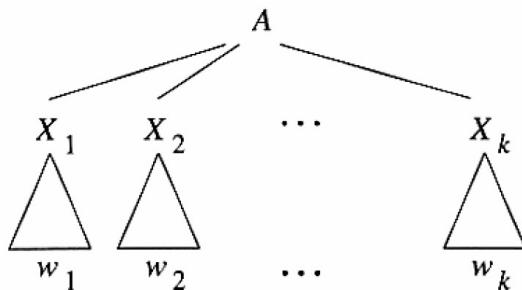
- **Teorema:** Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG y supongamos que existe un árbol de parseo cuya raíz tiene etiqueta A y que produce w . Entonces $A \Rightarrow_{lm}^* w$ en G .
- **Prueba:** la hacemos por inducción en la altura del árbol.
- **Base:** La altura es 1, y el árbol debe de verse así:



- Por lo tanto $A \rightarrow w \in P$ y $A \Rightarrow_{lm} w$.

De árboles a derivaciones

Inducción: Altura es $n + 1$. El árbol debe de verse así:



Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

De árboles a derivaciones

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Entonces $w = w_1 w_2 \dots w_k$ donde:

- ① Si $X_i \in T$, entonces $w_i = X_i$.
- ② Si $X_i \in V$, entonces debe de ser la raíz de un subárbol que nos da w_i , $X_i \Rightarrow_{lm}^* w_i$ en G por la hipótesis inductiva.

De árboles a derivaciones

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Ahora mostramos $A \Rightarrow_{lm}^* w_1 w_2 \dots w_i X_{i+1} X_{i+2} \dots X_k$, obtener una derivación más a la izquierda. Probamos sobre i :
- *Base*: Sea $i = 0$. Sabemos que: $A \Rightarrow_{lm} X_1 X_2 \dots X_k$.
- *Inducción*: Hacemos la hipótesis inductiva:
 $A \Rightarrow_{lm}^* w_1 w_2 \dots w_{i-1} X_i X_{i+1} \dots X_k$.
- *Caso 1*: Si $X_i \in T$, no hacemos nada ya que $X_i = w_i$ que nos da: $A \Rightarrow_{lm}^* w_1 w_2 \dots w_i X_{i+1} \dots X_k$.

De árboles a derivaciones

- Case 2: $X_i \in V$. Por la hipótesis inductiva existe una derivación $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \dots \Rightarrow_{lm} w_j$. Por la propiedad libre de contexto de las derivaciones podemos proceder como:

$$\begin{aligned}
 A &\Rightarrow_{lm}^* w_1 w_2 \dots w_{i-1} X_i X_{i+1} \dots X_k \Rightarrow_{lm}^* \\
 &w_1 w_2 \dots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} \dots X_k \Rightarrow_{lm}^* \\
 &w_1 w_2 \dots w_{i-1} \alpha_2 X_{i+1} \dots X_k \Rightarrow_{lm}^* \\
 &\dots \\
 &w_1 w_2 \dots w_{i-1} w_j X_{i+1} \dots X_k \Rightarrow_{lm}^*
 \end{aligned}$$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

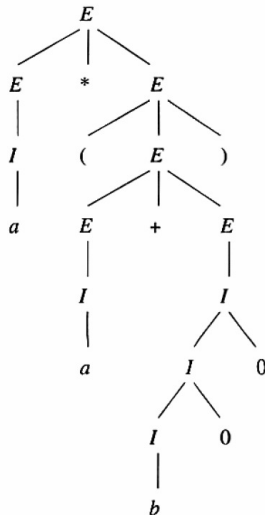
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo

Construyamos la derivación más a la izquierda del árbol:



Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo (cont.)

- Sopongamos que construimos inductivamente la derivación más a la izquierda: $E \Rightarrow_{lm} I \Rightarrow_{lm} a$ que corresponde con la rama izquierda del árbol, y la derivación más a la izquierda:
- $E \Rightarrow_{lm} (E) \Rightarrow_{lm} (E + E) \Rightarrow_{lm} (I + E) \Rightarrow_{lm} (a + E) \Rightarrow_{lm} (a * I) \Rightarrow_{lm} (a + I0) \Rightarrow_{lm} (a + I00) \Rightarrow_{lm} (a + b00)$ correspondiendo a la rama derecha del árbol.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ejemplo (cont.)

- Para las derivaciones correspondientes del árbol completo empezamos con $E \Rightarrow_{lm} E * E$ y expandimos la primera E con la primera derivación y la segunda E con la segunda derivación:
- $$E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E \Rightarrow_{lm} a * (E) \Rightarrow_{lm} a * (E + E) \Rightarrow_{lm} a * (I + E) \Rightarrow_{lm} a * (a + E) \Rightarrow_{lm} a * (a * I) \Rightarrow_{lm} a * (a + I0) \Rightarrow_{lm} a * (a + I00) \Rightarrow_{lm} a * (a + b00)$$
- De forma similar podemos convertir un árbol en una derivación más a la derecha. Osea, si existe un árbol de parseo con raíz etiquetada con la variable A que produce $w \in T^*$, entonces existe: $A \Rightarrow_{rm}^* w$.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

De derivaciones a inferencias recursivas

- Supongamos que $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_k \xRightarrow{*} w$, entonces:
 $w = w_1 w_2 \dots w_k$ donde $X_i \xRightarrow{*} w_i$.
- El factor w_i se puede extraer de $A \xRightarrow{*} w$ viendo únicamente a la expansión de X_i .
- Por ejemplo: $E \Rightarrow a * b + a$ y

$$E \Rightarrow \underbrace{E}_{X_1} \underbrace{*}_{X_2} \underbrace{E}_{X_3} \underbrace{+}_{X_4} \underbrace{E}_{X_5}$$

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

De derivaciones a inferencias recursivas

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Tenemos que: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow I * E + E \Rightarrow I * I + E \Rightarrow I * I + I \Rightarrow a * I + I \Rightarrow a * b + I \Rightarrow a * b + a$
- Viendo solo a la expansión de $X_3 = E$ podemos extraer: $E \Rightarrow I \Rightarrow b$.
- **Teorema:** Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG. Suponga $A \Rightarrow_G^* w$ y que w es una cadena de símbolos terminales. Entonces podemos inferir que w está en el lenguaje de la variable A .
- **Prueba:** La hacemos por inducción en la longitud de la derivación $A \Rightarrow_G^* w$

De derivaciones a inferencias recursivas

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- *Base*: Un paso. Si $A \Rightarrow_G w$ entonces debe de existir una producción $A \rightarrow w$ en P . Por lo que podemos inferir que w está en el lenguaje de A .
- *Inducción*: Suponemos $A \Rightarrow_G^* w$ en $n + 1$ pasos. Escribimos la derivación como: $A \Rightarrow_G X_1 X_2 \dots X_k \Rightarrow_G^* w$

De derivaciones a inferencias recursivas

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Como vimos, podemos partir w como $w_1 w_2 \dots w_k$ donde $X_i \xRightarrow{*}_G w_i$. Además $X_i \xRightarrow{*}_G w_i$ puede usar a lo más n pasos.
- Ahora tenemos una producción $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k$ y sabemos por la hipótesis inductiva que podemos inferir que w_i está en el lenguaje de X_i .
- Por lo que podemos inferir que $w_1 w_2 \dots w_k$ está en el lenguaje de A .

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

En la gramática:

$$E \rightarrow I$$

$$E \rightarrow E + E$$

$$E \rightarrow E * E$$

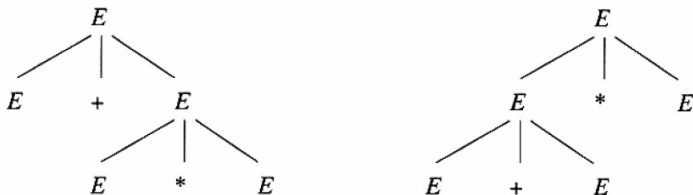
$$E \rightarrow (E)$$

...

la sentencia $E + E * E$ tiene dos derivaciones:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$ y $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$ lo cual nos da dos árboles de parseo:

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes



Si tuvieramos números, e.g., 2,4 y 6, en lugar de las E 's nos daría 26 por un lado y 36 por el otro. La existencia de varias derivaciones no es gran problema, sino la existencia de varios árboles de parseo.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Por ejemplo, en la misma gramática:

...

$$I \rightarrow a$$

$$I \rightarrow b$$

$$I \rightarrow Ia$$

$$I \rightarrow Ib$$

$$I \rightarrow I0$$

$$I \rightarrow I1$$

la cadena $a + b$ tiene varias derivaciones:

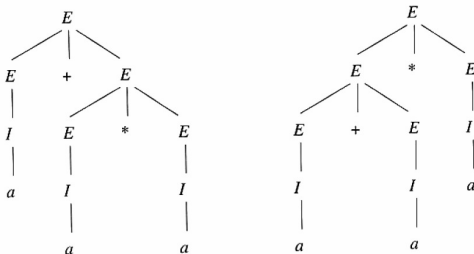
$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$$

sin embargo, sus árboles de parseo son los mismos y la estructura de $a + b$ no es ambígüa.

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

- **Definición:** Sea $G = (V, T, P, S)$ una CFG. Decimos que G es *ambígüa* si existe una cadena en T^* que tenga más de un árbol de parseo.
- Si todas las cadenas en $L(G)$ tienen a lo más un árbol de parseo, se dice que G es *no ambígüa*.
- **Ejemplo:** La cadena $a + a * a$ tiene dos árboles de parseo:



Removiendo la ambigüedad de las gramáticas

- Las buenas noticias: A veces se puede remover la ambigüedad “a mano”.
- Las malas noticias: no hay un algoritmo para hacerlo.
- Peores noticias: Algunos CFLs solo tienen CFGs ambigüas.
- En la gramática: $E \rightarrow I|E + E|E * E|(E)$ y $I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$ existen dos problemas:
 - 1 No hay precedencia entre $*$ y $+$
 - 2 No existe un agrupamiento en las secuencias de operadores, e.g., $E + E + E$ significa: $E + (E + E)$ o $(E + E) + E$.

Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Removiendo la ambigüedad de las gramáticas

Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Solución: podemos introducir más variables para forzar un agrupamiento uniforme:

- Un *factor* (F) es una expresión que no puede separarse por un $*$ o $+$
- Un *término* (T) es una expresión que no puede separarse por un $+$
- El resto son expresiones que pueden separarse por $*$ o $+$

Removiendo la ambigüedad de las gramáticas

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

La gramática queda:

$$I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$$

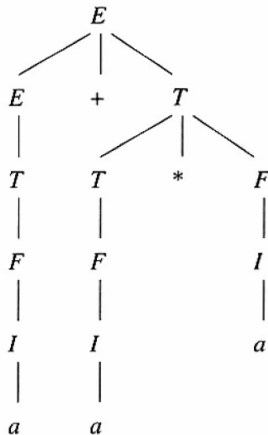
$$F \rightarrow I|(E)$$

$$T \rightarrow F|T * F$$

$$E \rightarrow T|E + T$$

Con esto, el único árbol de parseo de $a + a * a$ es:

Removiendo la ambigüedad de las gramáticas



Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Removiendo la ambigüedad de las gramáticas

Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

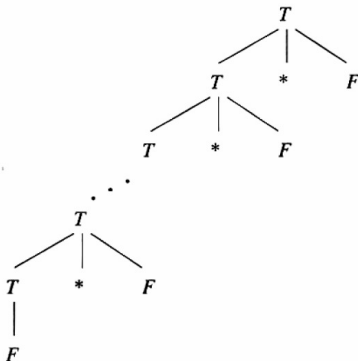
Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Las razones por las cuales la gramática nueva es no ambígua son:

- Un factor es o un identificador o (E) para una expresión E .
- El único árbol de parseo de una secuencia $f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * f_n$ de factores es el que da $f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1}$ como término y f_n como factor.

Removiendo la ambigüedad de las gramáticas



- Una expresión es una secuencia de: $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n$ de términos t_i y solo se puede parsear con $t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}$ como una expresión y con t_n como término.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

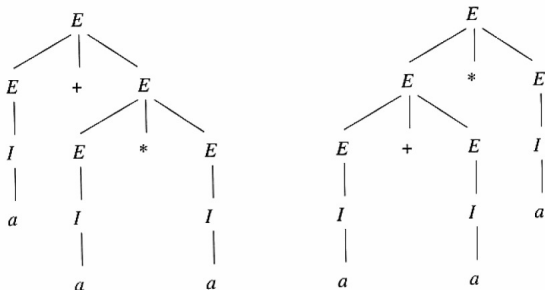
Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Derivaciones más a la izquierda y ambigüedad

En gramáticas no ambigüas, las derivaciones más a la izquierda y más a la derecha son únicas. Los dos árboles de derivación de $a + a * a$ son:



Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Derivaciones más a la izquierda y ambigüedad

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Que nos da dos derivaciones:

$$E \Rightarrow_{lm} E + E \Rightarrow_{lm} I + E \Rightarrow_{lm} a + E * E \Rightarrow_{lm} a + I * E \Rightarrow_{lm} a + a * E \Rightarrow_{lm} a + a * I \Rightarrow_{lm} a + a * a$$

y

$$E \Rightarrow_{lm} E + E * E \Rightarrow_{lm} I + E * E \Rightarrow_{lm} a + E * E \Rightarrow_{lm} a + I * E \Rightarrow_{lm} a + a * E \Rightarrow_{lm} a + a * I \Rightarrow_{lm} a + a * a$$

Derivaciones y ambigüedad

En general:

- Se tienen un árbol de parseo pero varias derivaciones.
- Muchas derivaciones más a la izquierda implican muchos árboles de parseo.
- Muchas derivaciones más a la derecha implican muchos árboles de parseo.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Derivaciones y ambigüedad

- **Teorema:** For cualquier CFG G , una cadena de terminales w tiene dos árboles de parseo diferentes si y solo si w tiene dos derivaciones más a la izquierda distintas desde el símbolo inicial.
- **Esquema de la prueba:** (Solo si) Si dos árboles de parseo difieren, tienen un nodo con diferentes producciones. Las derivaciones más a la izquierda correspondientes usaran sus derivaciones en estas dos producciones diferentes y por lo tanto serán distintas.
- (Si) Analizando como se construye un árbol de parseo a partir de una derivación más a la izquierda, debe de ser claro que dos derivaciones distintas producen dos árboles de parseo distintos.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

Ambigüedad Inherente

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes

- Un CFL L es *inherentemente ambigüo* si todas las gramáticas para L son ambigüas.
- **Ejemplo:** Considere $L = \{a^n b^n c^m d^m : n \geq 1, m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n : n \geq 1, m \geq 1\}$

Una gramática para L es:

$$S \rightarrow AB|C$$

$$A \rightarrow aAb|ab$$

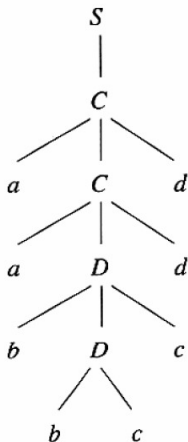
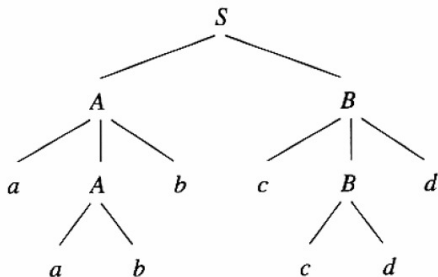
$$B \rightarrow cBd|cd$$

$$C \rightarrow aCd|aDd$$

$$D \rightarrow bDc|bc$$

Ejemplo

Veamos los árboles para: $aabbccdd$:



Gramáticas Libres de Contexto

Definición formal de CFGs

Derivaciones usando gramáticas

Derivaciones más a la izquierda y más a la derecha

El Lenguaje de la Gramática

Sentential Forms

Árboles de Parseo

Ambigüedad en Gramáticas y Lenguajes

Ejemplo (cont.)

- Vemos que existen dos derivaciones más a la izquierda:

$$S \Rightarrow_{lm} AB \Rightarrow_{lm} aAbB \Rightarrow_{lm} aabbB \Rightarrow_{lm} aabbcBd \Rightarrow_{lm} aabbccdd$$

y

$$S \Rightarrow_{lm} C \Rightarrow_{lm} aCd \Rightarrow_{lm} aabDdd \Rightarrow_{lm} aabbccdd$$

- Se puede mostrar que todas las gramáticas para L se comportan como la anterior. L es inherentemente ambigüo.

Gramáticas
Libres de
Contexto

Definición
formal de
CFGs

Derivaciones
usando
gramáticas

Derivaciones
más a la
izquierda y
más a la
derecha

El Lenguaje
de la
Gramática

Sentential
Forms

Árboles de
Parseo

Ambigüedad
en Gramáticas
y Lenguajes